TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2013, No. 3

Comité Editorial:

Anne Alberro Semerena

Marco Antonio Figueroa Ibarra

Carlos Jacob Rubio Barrios

Francisco Ruiz Benjumeda

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
México D.F.
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor: Carlos Jacob Rubio Barrios
Diseño de Portada: Manuel Macías Beckmann
www.rayaenmedio.com

Impreso: Torre y de la Torre Impresos
Aragón no. 134
Col. Álamos, 03400
México D.F.
Teléfonos: (55) 55-30-14-82 y (55) 55-38-34-53

©Queda estrictamente prohibida la reproducción parcial o total por cualquier sistema
o método, mecánico o electrónico, sin autorización previa del autor.
Impreso y hecho en México.
Julio de 2013.

Contenido

Presentación

Tzaloa, Año 2013, Número 3

Conforme avanza el año, en Tzaloa redoblamos nuestro esfuerzo y entusiasmo por brindar a toda la comunidad olímpica nuevos e interesantes problemas. Como siempre, en las secciones *Problemas de Práctica* y *Problemas de Entrenamiento* hemos incluido retos accesibles para todos los niveles, ya que nuestro principal interés es contribuir de manera útil brindando material adecuado, tanto para principiantes como para experimentados.

Por su contribución para la conformación de este número, agradecemos muy especialmente a Didier Adán Solís Gamboa, quien amablemente y con notable entusiasmo accedió a escribir para Tzaloa el artículo titulado *Contando con polinomios*. A través de sus páginas, nos introduce en el fascinante mundo de la *combinatoria algebraica* y en particular en el uso de las *funciones generadoras*. Dado lo único de este material, estamos seguros de que no sólo será de gran utilidad para aquellos que participan en los concursos olímpicos, sino que además será ampliamente apreciado por matemáticos de variados niveles e intereses.

Para la sección nacional de este número, presentamos las soluciones de los problemas del examen de la *etapa semifinal estatal* del año 2012, cuyos enunciados publicamos en el número anterior. Además, ahora incluimos también los enunciados correspondientes a los problemas del examen que se aplicó durante la *etapa final* del concurso del mismo año.

Por último, en el ámbito internacional, presentamos las soluciones del examen de la AMC 10 (American Mathematics Competition), así como el examen con soluciones correspondiente a la *XXV Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico* (APMO, por sus siglas en inglés), concurso en el que México participa desde el año 1990. Cabe destacar que las soluciones publicadas corresponden a las dadas por los mexicanos que fueron seleccionados para participar en este certamen.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Hace más de 26 años que la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Desde sus inicios, este programa se ha visto fortalecido gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado inumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

27ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 27^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1994. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2013-2014 y, para el 1° de julio de 2014, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org`

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 27^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 24 al 30 de noviembre de 2013 en el estado de Hidalgo. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección de las delegaciones que representarán a México en las distintas Olimpiadas Internacionales del año 2014: la XXVI Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico, que se llevará a cabo en el mes de marzo; la XVI Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, que se celebrará en el mes de junio en Costa Rica; la 55ª Olimpiada Internacional de Matemáticas, que se llevará a cabo en Sudáfrica en el mes de julio, y la XXIX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se realizará en el mes de septiembre en Honduras.

Contando con polinomios

Por Didier Adán Solís Gamboa

Nivel Intermedio

Uno de los campos más activos dentro del ámbito de las matemáticas discretas en los últimos veinte años es la llamada *combinatoria algebraica*, la cual consiste en asociar diversas estructuras algebraicas (polinomios, matrices, etc.) a objetos de naturaleza combinatoria (arreglos, gráficas, politopos, geometrías finitas, etc.). El propósito de este escrito es presentar algunas técnicas basadas en el uso de polinomios y series formales (es decir, polinomios con un número infinito de términos) que resultan útiles para plantear y resolver problemas de conteo en el contexto de la Olimpiada de Matemáticas. Esperamos que el lector que explore por primera vez estas ideas encuentre en ellas herramientas lo suficientemente útiles y versátiles; en tanto que el lector con más experiencia en la resolución de problemas de combinatoria encuentre en este material un interesante primer acercamiento al vasto mundo de las funciones generadoras.

La idea fundamental

Recordemos que un polinomio $p(x)$ es una expresión algebraica de la forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

donde x es una variable algebraica y $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ($a_n \neq 0$) son números reales llamados *coeficientes*. El número n recibe el nombre de *grado* del polinomio.
Saber sumar y multiplicar polinomios es una de las habilidades básicas en la Olimpiada y constituye el fundamento del álgebra elemental. Quizá en estos momentos ya efectuemos estas operaciones de forma mecánica. Sin embargo, para conseguir nuestros fines conviene prestarle un poco más de atención a la forma en que estas operaciones se realizan.

El siguiente ejemplo encierra la idea básica detrás de todo lo que iremos desarrollando en este material: ***identificar coeficientes de polinomios con el resultado de un conteo.*** Por ejemplo, sabemos que el coeficiente del término a^2b en $(a+b)^3$ es 3 ya que

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Por otro lado, este coeficiente coincide con el número de palabras de tres letras que pueden formarse usando dos letras a y una letra b. La conexión queda clara si desarrollamos paso a paso (y sin simplificar) la expresión $(a+b)^3$:

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b)\\
&= (a+b)[a(a+b)+b(a+b)]\\
&= (a+b)(aa+ab+ba+bb)\\
&= a((aa+ab+ba+bb)+b(aa+ab+ba+bb)\\
&= aaa+aab+aba+abb+baa+bab+bba+bbb.
\end{aligned}$$

Así resulta fácil observar que el término $3a^2b$ se obtiene al sumar las palabras aab, aba y baa. Visto de otra forma, el coeficiente del término en a^2b "lleva la cuenta"del número de palabras que se pueden formar con dos a y una b.
Procediendo con la misma lógica podemos establecer la célebre fórmula del Binomio de Newton.

Ejemplo 1 ***(Teorema del Binomio)*** *Sea n un número natural. Demuestra que*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i.$$

Solución. Efectuemos el producto

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n}$$

como lo hicimos anteriormente (es decir, paso a paso) para obtener una suma de palabras. Notemos que aquellas palabras que tienen i letras b y $n-i$ letras a se agrupan para obtener el término en $a^{n-i}b^i$. Por tanto, el coeficiente de dicho término es igual al número de palabras con i letras b y $n-i$ letras a. Si pensamos en cada factor $(a+b)$ como una caja donde están colocadas la letra a y la letra b, entonces cada una de estas palabras se forma tomando i de estas cajas y escogiendo en ellas la letra b en tanto que en las restantes cajas se escoge la letra a. Por tanto, existen $\binom{n}{i}$ palabras con i letras b y $n-i$ letras a, con lo cual se concluye la demostración.

Ahora apliquemos esta misma técnica de comparación entre coeficientes de polinomios para demostrar un famoso resultado en Teoría de Números.

Ejemplo 2 *Sea* $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_m^{\alpha_m}$ *un número natural escrito en su descomposición en primos. Halla en términos de los primos* p_i *y de los números* α_i*, una fórmula para* $\sigma(n)$*, la suma de los divisores positivos de n.*

Solución. Observemos que cada divisor positivo de n es un número de la forma

$$d = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m},$$

donde $0 \leq a_i \leq \alpha_i$ para cada $i = 1, \ldots, m$ (ver el artículo de Tzaloa 1, 2013). Por tanto,

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m}$$

puede visualizarse como un polinomio en las variables p_i cuyos términos son precisamente los divisores de n. Notemos además que cada uno de estos divisores puede considerarse como una palabra hecha con las letras $p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \ldots, p_m^{a_m}$, en ese orden. Al igual que en el ejemplo anterior, queremos ver a $\sigma(n)$ como un producto de polinomios

$$\sigma(n) = d_1(n) d_2(n) \cdots d_m(n)$$

donde cada letra se toma de un factor distinto. Dado que la k-ésima letra es $p_k^{a_k}$, entonces el k-ésimo factor del producto debe contener a todos los posibles valores de a_k, es decir, $\{1, p_k, p_k^2, \ldots, p_k^{\alpha_k}\}$. Por tanto, el k-ésimo factor en $\sigma(n)$ es

$$1 + p_k + p_k^2 + \cdots + p_k^{\alpha_k} = \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1},$$

y en consecuencia

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_m^{\alpha_m+1} - 1}{p_m - 1}.$$

Finalizamos este apartado con un ejemplo más.

Ejemplo 3 *Para cada subconjunto $A \neq \emptyset$ del conjunto $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ sea $P(A)$ el recíproco del producto de todos los elementos de A. Halla $P = \sum_A P(A)$.*

Solución. Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \subset X$ entonces

$$P(A) = \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{a_k}.$$

Por tanto, $P(A)$ es una palabra formada con las letras $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_k}$ y en consecuencia P puede verse como un polinomio. Más aún, podemos expresar P como un producto de polinomios donde cada letra que conforma la palabra $P(A)$ debe proceder de un factor distinto. Así el producto de polinomios buscado es

$$P = \left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

donde cada factor es de la forma $1 + \frac{1}{i}$.
Sin embargo, al expandir este producto aparece (además de todos los sumandos requeridos) un sumando 1 que corresponde a escoger el término 1 de cada factor, o de

manera equivalente, a escoger $A = \emptyset$. Por tanto tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_A P(A) &= \left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\\ &= \left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\right)-1\\ &= (n+1)-1=n.\end{aligned}$$

Otra mirada al producto de polinomios

Como hemos podido constatar en los ejemplos previos, el producto de polinomios juega un papel muy importante en el empleo de esta técnica. Por tanto, resulta conveniente observar más detenidamente cómo se realiza el producto de dos polinomios. Para efectuar este análisis, resulta conveniente visualizar a los polinomios dentro del contexto más amplio de las *series formales*, es decir, expresiones algebraicas con quizá un número infinito de términos. De manera precisa, una serie formal $S(x)$ en x es una expresión de la forma

$$S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n,$$

donde $a_0, a_1, a_2, \ldots$ son números reales.
De tal modo, un polinomio de grado N es una serie formal donde $a_N \neq 0$ y $a_n = 0$ para $n > N$. En el lenguaje de las series formales podemos expresar el producto de dos series de manera muy sencilla.

Teorema 1 *Si* $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ *y* $R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n$ *entonces* $S(x)R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$ *donde*

$$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \ldots + a_nb_0 = \sum_{i=0}^{i} a_ib_{n-i}.$$

Demostración. Notemos que el resultado de multiplicar el término a^ix^i de $S(x)$ con el término b^jx^j de $R(x)$ es $a^ib^jx^{i+j}$. Más aún, debido a las leyes de los exponentes, la única forma de obtener un término de la forma x^n en el producto $S(x)R(x)$ es tomando una pareja (i, j) tal que $n = i + j$ y realizando el producto antes mencionado. Haciendo $j = n - i$ se obtiene el resultado.
Esta fórmula nos permite interpretar una suma de productos al estilo del lado derecho de la igualdad anterior como el coeficiente de una serie formal que se obtiene de multiplicar dos series formales. Este hecho con frecuencia puede ser usado para demostrar identidades combinatorias. A continuación presentamos un ejemplo.

Ejemplo 4 ***(Identidad de Vandermonde)*** *Demuestra la siguiente igualdad*

$$\binom{n+m}{k} = \binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \binom{n}{2}\binom{m}{k-2} + \cdots + \binom{n}{k}\binom{m}{0}.$$

Solución. En vista del Teorema del Binomio, podemos aplicar directamente la fórmula del producto de series formales para deducir que la suma en el lado derecho de la igualdad es en realidad el coeficiente de x^k en el producto

$$(x+1)^n(x+1)^m = (x+1)^{n+m},$$

con lo que el resultado se sigue de inmediato.
En ocasiones una serie formal puede admitir una *expresión cerrada*, es decir una expresión que no involucra un número infinito de términos. El siguiente ejemplo es de gran importancia.

Ejemplo 5 ***(Serie geométrica)*** *La serie* $G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *admite la expresión cerrada* $G(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Solución. Notemos que $xG(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots$, y por lo tanto $(1-x)G(x) = G(x) - xG(x) = 1$, de donde el resultado se sigue de inmediato.

Ejemplo 6 *Calcula una expresión cerrada para las siguientes series formales:*

1. $A(x) = x^k + x^{k+1} + x^{k+2} + \cdots = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} x^{k+i}$.
2. $B(x) = 1 + x^2 + x^4 + \cdots = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} x^{2i}$.

Solución. Para el primer inciso, observemos que

$$A(x) = x^k(1 + x + x^2 + \cdots) = x^k G(x) = \frac{x^k}{1-x}.$$

Por otro lado, observemos que $B(x) = G(x^2) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

El Teorema del Binomio admite una generalización que nos permite encontrar expresiones cerradas para un gran número de series formales. La demostración de este elegante y poderoso resultado queda fuera del ámbito de este artículo por lo que lo enunciaremos sin demostración.

Teorema 2 *Sea r un número real, entonces*

$$(a+b)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!} a^{r-k} b^k.$$

Observemos que cuando r es un entero no negativo entonces

$$\frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!} = \begin{cases} \binom{r}{k} & \text{si } k \le r \\ 0 & \text{si } k > r. \end{cases}$$

y en consecuencia el Teorema 2 se reduce al Teorema del Binomio.
Por otro lado, si $r = -m$ con m un entero positivo, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1+x)^m} = (1+x)^r &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{m(m+1)(m+2)\cdots(m+k-1)}{k!} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{m+k-1}{k} x^k.
\end{aligned}$$

En los siguientes ejemplos delinearemos un método que nos permitirá sacar el máximo provecho a las técnicas que hemos discutido.

Aplicaciones

Ejemplo 7 *¿De cuántas formas se pueden repartir* 10 *manzanas entre* 6 *niños de manera que no sobre ninguna?*

Solución. Este es un clásico problema que se puede resolver usando la técnica de separadores. En este caso, lo abordaremos desde el punto de vista de la multiplicación de series formales. Notemos primeramente que este problema es equivalente al de hallar todas las formas en que 10 puede escribirse como suma de seis enteros no negativos, o equivalentemente, soluciones enteras a la ecuación

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_6 = 10.$$

De tal suerte, es posible plantear el problema en términos de multiplicación de polinomios: se trata de hallar el coeficiente de x^{10} en el producto de seis polinomios, donde cada uno aporta un término de la forma x^{n_i} en la construcción de una palabra o monomio. (Por ejemplo, la suma $4 + 2 + 0 + 1 + 2 + 1$ estaría representada por $x^4 \cdot x^2 \cdot 1 \cdot x \cdot x^2 \cdot x = x^{10}$.) Por tanto, buscamos el coeficiente de x^{10} en el polinomio

$$p(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{10})^6.$$

Para hallar este término usamos la conocida identidad $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ y el Teorema del Binomio.

$$p(x) = (1 + x + x^2 + \cdots x^{10})^6 = \left(\frac{1-x^{11}}{1-x}\right)^6 = \frac{1}{(1-x)^6} \sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i} (-x^{11})^i.$$

Así el término de x^{10} se forma con el producto de las series formales

$$R(x) = \sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i} (-x^{11})^i \quad \text{y} \quad S(x) = \frac{1}{(1-x)^6}.$$

Como la potencia de cada término en la serie $R(x)$ es un múltiplo de 11, sólo el primer término contribuirá al término x^{10} del producto $R(x)S(x)$ y en consecuencia el término requerido es el coeficiente de x^{10} en $S(x)$, es decir,

$$\binom{6+10-1}{10} = \binom{15}{10}.$$

En este punto vale la pena notar que en el planteamiento del problema podemos usar la serie formal $G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ en lugar del factor polinomial $p(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{10}$ ya que los términos de $G(x)$ con potencia mayor que 10 no contribuyen al coeficiente buscado.

Hasta este momento, todos los ejemplos previos admiten soluciones basadas en técnicas elementales. En el siguiente ejemplo se manifiestan las ventajas del uso de series formales en problemas de conteo.

Ejemplo 8 *Deeds va al mercado con la intención de comprar fruta. En su lista del mercado ha hecho las siguientes anotaciones:*

- *La cantidad de manzanas debe ser múltiplo de* 5*.*
- *Un número par de plátanos.*
- *No comprar más de* 4 *naranjas.*
- *Llevar a lo más una sandía.*

¿De cuántas maneras puede Deeds hacer la compra si debe llevar a casa 2013 *frutas?*

Solución. Al igual que en el ejemplo anterior, el problema se puede plantear en términos de las soluciones en enteros no negativos de la ecuación

$$n_M + n_P + n_N + n_S = 2013$$

sujeta a las condiciones

$$5 \mid n_M, \quad 2 \mid n_P, \quad n_N \leq 4, \quad n_S \leq 1.$$

Siguiendo la misma lógica que en el ejemplo anterior, a cada variable le asignaremos un polinomio con los términos adecuados de tal forma que la respectiva condición se satisfaga. Después de un breve análisis, notamos que los polinomios en cuestión son

$$\begin{aligned} p_M(x) &= 1 + x^5 + x^{10} + \cdots + x^{2010} \\ p_P(x) &= 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2012} \\ p_N(x) &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \\ p_S(x) &= 1 + x. \end{aligned}$$

Luego, debemos hallar el coeficiente de x^{2013} en el producto

$$F(x) = p_M(x)p_P(x)p_N(x)p_S(x).$$

Debido a la observación hecha en el párrafo precedente, podemos sustituir $p_M(x)$ y $p_P(x)$ por series adecuadas

$$\begin{aligned} S_M(x) &= 1 + x^5 + x^{10} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^{5k} = \frac{1}{1-x^5} \\ p_P(x) &= 1 + x^2 + x^4 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

y calcular así el producto deseado

$$\begin{aligned} F(x) &= S_M(x) S_P(x) p_N(x) p_S(x) = \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^5}{1-x} \cdot (1+x) \\ &= \frac{1+x}{(1-x)^2(1-x)} = \frac{1}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

En consecuencia el coeficiente buscado es $\binom{2+2013-1}{2013} = \binom{2014}{2013} = 2014$.

En los últimos ejemplos de esta nota veremos cómo las técnicas descritas hasta ahora pueden aplicarse al caso de las series formales en dos variables. Como primer ejemplo procedemos a encontrar la serie que genera a los coeficientes binomiales. Para un valor fijo de n el polinomio

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

genera a la sucesión de coeficientes binomiales $\binom{n}{k} x^k$. Ahora bien, si dejamos variar n también, entonces necesitaremos de una serie formal en dos variables para generar dichos coeficientes, es decir

$$B(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k y^n.$$

Ejemplo 9 *Una forma cerrada para $B(x,y)$ está dada por*

$$B(x,y) = \frac{1}{1-(1+x)y}.$$

Solución. Como una primera aproximación, convendría considerar la suma de todas las palabras que están presentes en alguna expansión binomial, es decir

$$\hat{S}(x) = p_0(x) + p_1(x) + p_2(x) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x).$$

Notemos que en esta serie formal aparecen todos los términos posibles de la forma x^k; sin embargo, no se puede saber de cuál sumando $p_n(x)$ proviene cada uno de estos términos. Por ejemplo, un sumando x^3 podría representar a la palabra $1 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot 1 \cdot$, en cuyo caso corresponde al polinomio $p_5(x)$, o bien a la palabra $x \cdot x \cdot x$ que proviene del polinomio $p_3(x)$. Para remediar esto, introducimos la variable y para llevar la cuenta del sumando $p_n(x)$ del cual proviene el término x^k. De tal suerte, el término en $x^k y^n$ en $B(x, y)$ representa justamente al término en x^k presente en el polinomio $p_n(x)$. Por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} B(x,y) &= p_0(x) + p_1(x)y + p_2(x)y^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(1+x)^n y^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}[(1+x)y]^n = \frac{1}{1-(1+x)y}. \end{aligned}$$

Con esta misma técnica se puede resolver el siguiente problema.

Ejemplo 10 *Una* composición *de un entero positivo n es una expresión de la forma $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ donde a_i es un entero positivo. Por ejemplo* $3+1$*,* $1+3$*,* $2+2$*,* $2+1+1$*,* $1+2+1$*,* $1+1+2$ *y* $1+1+1+1$ *son todas las composiciones de* 4*. Halla el número $c(n,k)$ de todas las composiciones del entero n en k sumandos.*

Solución. Sea

$$C(x,y) = \sum_{n,k} c(n,k)x^n y^k$$

la serie formal asociada a $c(x, y)$. Si fijamos k entonces el problema puede plantearse en términos similares a los del ejemplo 8: cada polinomio

$$p_k^i(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$$

aporta la letra x^{a_i}, $a_i \geq 1$, en la palabra $x^{a_1}x^{a_2}\cdots x^{a_k}$; por lo que el número buscado es el coeficiente de x^n en la expansión de

$$p_k(x) = p_k^1(x)p_k^2(x)\cdots p_k^k(x).$$

Al sustituir $p_k^i(x)$ por la serie formal

$$P_k^i(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots = x(1 + x + x^2 + \cdots) = \frac{x}{1-x}$$

obtenemos la expresión cerrada

$$P_k(x) = P_k^1(x)P_k^2(x)\cdots P_k^k(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^k.$$

Finalmente, para indicar que un término en x^n proviene de la serie $P_k(x)$ lo multiplicamos por y^k. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} C(x,y) &= P_0 + P_1(x)y + P_2(x)y^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{1-x}\right)^k y^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{xy}{1-x}\right)^k = \frac{1}{1-xy/(1-x)}. \end{aligned}$$

Reagrupamos y expandimos para obtener

$$\begin{aligned} C(x,y) &= \frac{1-x}{1-x-xy} = 1 + xy\left(\frac{1}{1-x(1+y)}\right) \\ &= 1 + xy\sum_{i=0}^{\infty} x^i(1+y)^i \\ &= 1 + xy\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{i}{j}x^i y^j. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el término en $x^n y^k$ tiene por coeficiente $c(n,k) = \binom{n-1}{k-1}$.

A manera de conclusión

En esta nota hemos explorado las técnicas más básicas de conteo con polinomios. Los ejemplos que aquí presentamos ilustran que dichas técnicas se pueden aplicar en una gran variedad de contextos. Estas herramientas proveen una alternativa para plantear y resolver problemas de una manera metódica y directa. Esperamos que el lector haya sacado provecho de este material y que aplique lo aprendido en el próximo examen de la Olimpiada de Matemáticas.

Problemas

1. Demuestra la siguiente generalización del Teorema del Binomio:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k},$$

   donde $n_1, n_2, \ldots, n_k$ son enteros no negativos.

2. Demuestra que la función φ de Euler satisface

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_m}\right)$$

   donde $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$ es la descomposición de n en primos.

3. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $a + b + c + d = 98$ donde a, b, c, d son impares positivos?

4. Halla la suma de todas las fracciones $\frac{a}{b}$ donde a, b son divisores positivos de 27000 tales que $(a, b) = 1$.

5. Demuestra que $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n+r}{r} = \binom{n+r+1}{r}$.

6. Encuentra el coeficiente de x^n en la serie formal $S(x)$ que tiene la expresión cerrada

$$S(x) = \frac{1}{(1-x^2)^2}.$$

7. Si $0 \leq k \leq r$, demuestra que

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{r}{i}\binom{r}{k-i} = \begin{cases} (-1)^{k/2}\binom{\frac{k}{2}}{r} & \text{si } k \text{ es par,} \\ 0 & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}$$

8. Un mazo de cartas está hecho de 32 cartas, todas diferentes, donde 2 son comodines y las restantes 30 están marcadas con un número y un símbolo. Los símbolos son 3 (triángulo, círculo y cuadrado) y los números son 10 (2^1, 2^2, $2^3, \ldots 2^{10}$). Los comodines no tienen símbolo y están marcados con el número 1. Para cada subconjunto X se define $S(X)$ como la suma de los números que aparecen en cada una de las cartas que están en X. ¿Cuántos subconjuntos X satisfacen $S(X) = 2013$?

9. Si $0 \leq k \leq n$, demuestra que

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}\binom{n-k}{\lfloor (n-k)/2 \rfloor} = \binom{2n+1}{n}.$$

10. Sea $f(n,k)$ el número de subconjuntos del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ que tienen k elementos y no contienen ninguna pareja de números consecutivos. Halla $f(n,k)$.

11. Sea k un entero no negativo fijo. Encuentra una forma cerrada de la serie formal

$$\hat{B}(y) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}y^n.$$

12. Una partición de un entero positivo n es una manera de expresar n como la suma de enteros positivos. Por ejemplo, $3+1, 2+2, 2+1+1$ y $1+1+1+1$ son todas las particiones de 4. Demuestra que el número de particiones de n en sumandos distintos es igual al número de particiones de n en sumandos impares.

Sugerencias a los problemas

1. Al expandir el lado derecho se obtiene un polinomio, donde cada término es una palabra compuesta por n_1 letras a_1, n_2 letras a_2, etc. ¿Cuántas de estas palabras hay?

2. Un entero es primo relativo con $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$ si y sólo si no es divisible por ningún p_i. Usa el Principio de Inclusión-Exclusión para obtener la cantidad de números $1 < k < n$ que son divisibles por algún p_i. Interpreta la suma alternante obtenida como un producto.

3. La serie formal $I(x) = x + x^3 + x^5 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} x^{2i-1}$ será de gran ayuda. ¿Puedes encontrar una forma cerrada de esta serie?

4. Cada fracción es de la forma $2^x3^y5^z$, con x, y, z enteros entre -3 y 3, inclusive. Cada sumando aparece exactamente una vez en el producto $(2^{-3} + 2^{-2} + \cdots + 2^3)(3^{-3} + 3^{-2} + \cdots + 3^3)(5^{-3} + 5^{-2} + \cdots + 5^3)$.

5. Interpreta $\binom{n}{0}(1)+\binom{n+1}{1}(1)+\cdots+\binom{n+r}{r}(1)$ como el coeficiente de x^r en el producto de dos series formales.

6. Expresa $\frac{1}{(1-x^2)^2}$ en fracciones parciales.

7. Calcula el coeficiente de x^k en el polinomio $p(x) = (1 + x)^r(1 - x)^r$.

8. Considera el polinomio $p(x) = (1 + x)^2(1 + x^2)^3(1 + x^4)^3 \cdots (1 + x^{1024})^3$. Para hallar el coeficiente de x^{2013} sustituye $p(x)$ por una serie formal.

9. Utiliza la Fórmula de Pascal para concluir $\binom{2n+1}{n} = \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}$. Después usa el Teorema del Binomio Generalizado (problema 1) aplicado a $p(x) = (1 + x)^{2n} = (1 + 2x + x^2)^n$. Este problema requiere una substancial cantidad de álgebra.

10. Demuestra que $f(n, k) = f(n - 1, k) + f(n - 2, k - 1)$ y considera $F_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n, k)x^k$. Demuestra que $F_k(x) = \dfrac{x^2}{1-x}F_{k-1}(x)$ y a continuación halla una forma cerrada para $F_k(x)$.

11. Observa que $B(x, y) = \dfrac{1}{1-(1+x)y} = \dfrac{1}{1-y} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{y}{1-y}x}$. Expande el lado derecho de la igualdad como una serie formal en x.

12. Demuestra que en ambos casos, el número buscado corresponde al coeficiente de x^n en el producto de series formales $P(x) = \dfrac{1}{1-x} \cdot \dfrac{1}{1-x^2} \cdots \dfrac{1}{1-x^n}$.

Bibliografía

1. Andreescu, T. y Feng, Z. *102 combinatorial problems.* Birkhäuser, 2003.
2. Engel, A. *Problem solving strategies.* Springer-Verlag, 1998.
3. Grimaldi, R. *Matemática discreta y combinatoria.* Addison-Wesley, 1989.
4. Soberón, P. *Combinatoria para Olimpiadas Internacionales.* UNAM, 2010.
5. Wilf, H. *Generatingfunctionology.* Academic Press, 1994.

Problemas de práctica

A continuación te invitamos a poner en práctica todas tus habilidades y usar todos tus conocimientos para encontrar la solución de los 20 problemas de práctica que hemos preparado especialmente para ti en este tercer número del año 2013.

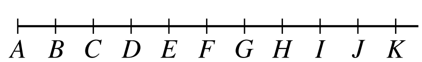
Es posible, que para muchos problemas, la solución o siquiera el camino para encontrarla, sea difícil de hallar al primer intento; en estos casos y aunque en la siguiente sección podrás encontrar las respuestas de todos ellos, te recomendamos mejor cambiar el punto de vista e intentar diferentes acercamientos, de manera que sólo consultes la solución de un problema como tu último recurso, o preferiblemente, únicamente con propósitos de verificación.

Problema 1. Una serie del milenio es aquella serie de enteros consecutivos cuya suma es 2000. Sea m el primer término de la serie. Determina el menor valor posible de m y el menor valor positivo de m.

Problema 2. ¿Cuál es la mayor cantidad de enteros positivos consecutivos con la propiedad de que en la descomposición en primos de cada uno de ellos, los exponentes de los divisores primos son todos impares?

Problema 3. Determina todos los posibles valores para a, b y c números reales positivos tales que $abc = (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$.

Problema 4. Una línea de tren se divide en 10 secciones por las estaciones A, B, C, D, E, F, G, H, I, J y K. La distancia entre A y K es de 56 km. Un viaje entre dos estaciones con una escala nunca excede los 12 km, y un viaje entre dos estaciones con dos escalas siempre es mayor o igual que 17 km. ¿Cuál es la distancia entre B y G?



Problema 5. Juan debe escribir en el pizarrón varios números enteros positivos distintos entre sí, de modo que cumplan las siguientes condiciones:

- El máximo común divisor de dos números cualesquiera debe ser mayor que 1.
- El máximo común divisor de tres números cualesquiera debe ser igual a 1.
- Cada número escrito debe ser menor que 5005.

¿Cuántos números como máximo podrá escribir Juan?

Problema 6. Tenemos un 100-ágono que está construido con 100 varitas. ¿Existe algún caso donde las 100 varitas que lo componen sean de logitudes tales que sea imposible construir un polígono usando cualquier número menor de estas varitas?

Problema 7. ¿Es posible encontrar enteros positivos a, b, c y d, tales que

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 100^{100}?$$

Problema 8. Ana y Frida tienen 9 monedas cada una. Las monedas que tienen son únicamente de 10 centavos y 20 centavos. Ana coloca sus monedas en una cuadrícula de la siguiente manera:

10	20	20
10	10	10
20	20	10

La cantidad de dinero que está dentro de un mismo tablero de 2×2 suman 50 centavos, 60 centavos, 60 centavos y 50 centavos, respectivamente. Frida hace algo similar con sus monedas y observa que la suma de las monedas de sus cuatro tableros de 2×2 es 50 centavos. Si Frida tiene en total M centavos, ¿cuántos valores posibles puede tomar M?

Problema 9. $ABCD$ es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de centro O y tal que tiene inscrita una circunferencia de centro I. Sea S la intersección de sus diagonales. Demuestra que si dos de los puntos O, I y S coinciden, entonces $ABCD$ debe ser un cuadrado.

Problema 10. En una fiesta cada mujer baila con al menos un hombre y ningún hombre baila con todas las mujeres. Demuestra que existen hombres H, H' y mujeres M y M' tales que H bailó con M, H' bailó con M', pero H no bailó con M' y H' no bailó con M.

Problema 11. Sea ABC un triángulo con incentro I. Sean M y N los puntos medios de los lados AB y AC, respectivamente. Las rectas BI y CI intersectan a la recta MN en los puntos K y L, respectivamente. Demuestra que $AI + BI + CI > BC + KL$.

Problema 12. En la sucesión finita $00, 01, 02, 03, \ldots, 99$; los términos son reacomodados de forma que cada término se obtiene del anterior, aumentando o disminuyendo sólo uno de sus dígitos en una unidad (por ejemplo, a 29 le pueden suceder 19, 39 o 28 pero no 30 o 20). ¿Cuál es el máximo número de términos que pueden haber permanecido en su lugar?

Problema 13. Sea N un polígono convexo con 1415 vértices y perímetro 2001. Demuestra que podemos encontrar tres vértices de N que forman un triángulo con área menor que 1.

Problema 14. Los enteros positivos x, y son tales que $3x + 4y$ y $4x + 3y$ son cuadrados perfectos. Demuestra que x e y son divisibles entre 7.

Problema 15. Un tablero de 4×4 se divide en 16 cuadrados unitarios blancos. Dos cuadrados unitarios son vecinos si comparten un lado. Un movimiento consiste en elegir una casilla y cambiar los colores de sus vecinos de negro a blanco y viceversa. Después de exactamente n movimientos todas las casillas son negras. Encuentra el menor valor posible de n.

Problema 16. Dado un rectángulo de medidas $a \times b$, tales que $\frac{b}{2} < a < b$, demuestra que siempre es posible cortarlo en tres piezas que se puedan reacomodar, sin traslaparse, formando un cuadrado.

Problema 17. Dados n puntos en una circunferencia se escribe al lado de uno de ellos un 1 y al lado de cada uno de los otros un 0. La operación permitida consiste en elegir un punto que tenga un 1 y cambiar el número de ese punto y también los números de sus dos vecinos, el de la izquierda y el de la derecha (donde hay 1 se escribe 0 y donde hay 0 se escribe 1).

1. Si $n = 101$, demuestra que se puede lograr, mediante una sucesión de operaciones permitidas, que cada uno de los n puntos tenga escrito un 0.
2. Si $n = 102$, demuestra que es imposible lograr que todos los números sean 0.

Problema 18. Usemos la expresión $a \wedge b$ para representar al número a^b. Ahora, el orden en que se efectuará la operación $7 \wedge 7 \wedge 7 \wedge 7 \wedge 7 \wedge 7 \wedge 7$ está determinado por la inserción de 5 juegos de paréntesis. Determina si es posible insertar los paréntesis de dos maneras diferentes y tales que en ambos casos se obtenga el mismo resultado.

Problema 19. Sean a, b, c enteros positivos tales que a es par y b, c son impares.

1. Demuestra que existe un entero positivo n tal que 2^n no divide a $b^k + c^k$ para todo entero positivo k.
2. Demuestra que existe un entero positivo N tal que 2^N no divide a $a^k + b^k + c^k$ para todo entero positivo k.

Problema 20. Sean a, b y c números reales positivos tales que $a^2 + b^2 + c^2 = 2abc + 1$. Determina el valor máximo del producto $(a - 2bc)(b - 2ca)(c - 2ab)$.

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección te presentamos las soluciones que hemos preparado para los 20 problemas de práctica que figuran en este número de tu revista. Date cuenta que para cada problema se incluye la explicación que justifica su validez. Observa que, en todos los casos, la argumentación se basa en resultados conocidos y/o en razonamientos lógicos y que para ningún problema la solución se presenta sin sustento.

Como siempre, las soluciones que presentamos no son necesariamente las únicas y probablemente tampoco son las mejores, por lo que es muy posible que tú hayas encontrado una solución distinta pero igualmente válida. Si este es el caso y no estás muy seguro de su validez o simplemente la quieres compartir con nosotros te invitamos para que nos escribas a `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. Consideremos una serie del milenio con n enteros, que comienza con el entero m. Entonces, los enteros son

$$m, m+1, m+2, \ldots, m+n-1.$$

Luego, tenemos que $m + (m+1) + (m+2) + \cdots + (m+n-1) = 2000$, es decir,

$$\begin{aligned} mn + \frac{(n-1)n}{2} &= 2000 \\ \frac{n(2m+n-1)}{2} &= 2000 \\ n^2 + (2m-1)n - 4000 &= 0. \end{aligned}$$

Considerando esta ecuación como una ecuación cuadrática en n, tenemos que la suma de sus raíces es $-(2m-1)$, un entero impar, luego una raíz es par y la otra es impar. Además, el producto de sus raíces es 4000, cuyos divisores impares son 1, 5, 25 y 125. Luego, tenemos la siguiente tabla,

Factorización	$2m-1$	m
$(n-1)(n+4000)$	3999	2000
$(n+1)(n-4000)$	−3999	−1999
$(n-5)(n+800)$	795	398
$(n+5)(n-800)$	−795	−397
$(n-25)(n+160)$	135	68
$(n+25)(n-160)$	−135	−67
$(n-125)(n+32)$	−93	−46
$(n+125)(n-32)$	93	47

Así, -1999 es el menor valor posible de m y 47 es el menor valor positivo posible de m.

Solución del problema 2. La respuesta es 7. Supongamos que existen 8 números consecutivos tales que los exponentes de los factores primos de su descomposición son todos impares. Uno de ellos, al que llamamos n es divisible entre 8. Luego, entre los ocho números está $n+4$ o bien $n-4$, y tanto uno como el otro son divisibles entre 4, luego el exponente del 2 en su descomposición es par, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, el máximo número es 7. Un ejemplo sería: 29, 30, 31, 32, 33, 34 y 35.

Solución del problema 3. Claramente $a = b = c$ es una solución. Veamos que es la única. Como la ecuación es invariante bajo cualquier permutación de a, b y c, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $0 < a \leq b \leq c$.
Observemos que,

$$\begin{aligned}
(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)-abc &= 0\\
(b+c-a)[a+(b-c)][a-(b-c)]-abc &= 0\\
(b+c-a)[a^2-(b-c)^2]-abc &= 0\\
a^2(b+c-a)-(b+c-a)(b-c)^2-abc &= 0\\
a(-ab-ac+a^2+bc)+(b+c-a)(b-c)^2 &= 0\\
a(b-a)(c-a)+(b+c-a)(b-c)^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Como $a(b-a)(c-a) \geq 0$ y $(b+c-a)(b-c)^2 \geq 0$, la única manera de obtener la última igualdad es si $a(b-a)(c-a) = 0$ y $(b+c-a)(b-c)^2 = 0$. Como $a > 0$, debemos tener $(b-a)(c-a) = 0$ lo cual ocurre si $a = b = c$. Además, es fácil ver que $a = b = c$ satisfacen la igualdad $(b+c-a)(b-c)^2 = 0$. Por lo tanto, no existe otra solución en los reales positivos.

Solución del problema 4. Tenemos que $AK = 56$ y $AK = AD + DG + GJ + JK$. Como $AD, DG, GJ \geq 17$, entonces $JK \leq 5$. Además $HK \geq 17$, y como $JK \leq 5$, entonces $HJ \geq 12$. Pero también $HJ \leq 12$, por lo tanto $HJ = 12$.
Como $HK \geq 17$ y $HJ = 12$, entonces $JK = 5$. Simétricamente encontramos que $AB = 5$ y $BD = 12$. Ahora bien,

$$DH = AK - AB - BD - HJ - JK = 56 - 5 - 12 - 5 - 2 = 22.$$

Por otro lado, $GH \geq 5$ ya que $GJ \geq 17$ y $HJ = 12$. Además, como $DG \geq 17$ y $GH \geq 5$, tenemos que $DH = DG + GH \geq 17 + 5 = 22$, pero como $DH = 22$, es necesario que $DG = 17$ y $GH = 5$. Por lo tanto, $BG = BD + DG = 12 + 17 = 29\, km$.

Solución del problema 5. Observemos que dados dos números escritos por Juan estos tienen en común al menos un factor primo p que no es factor de ninguno de los otros números. Veamos que Juan puede escribir como máximo cuatro números.
Supongamos que logró escribir 5 números: N_1, N_2, N_3, N_4 y N_5. Sea p_1 el factor común entre N_1 y N_2; p_2, distinto de p_1, el factor común entre N_1 y N_3; p_3, distinto de p_1 y p_2, el factor común de N_1 y N_4. Continuemos con este proceso, es decir, para cada par de números del conjnto $\{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5\}$ tomamos un factor primo común, tendremos 10 números primos: $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{10}$ distintos tales que,

$$\begin{array}{rcl} p_1, p_2, p_3, p_4 & \text{dividen a} & N_1 \\ p_1, p_5, p_6, p_7 & \text{dividen a} & N_2 \\ p_2, p_5, p_8, p_9 & \text{dividen a} & N_3 \\ p_3, p_6, p_8, p_{10} & \text{dividen a} & N_4 \\ p_4, p_7, p_9, p_{10} & \text{dividen a} & N_5 \end{array}$$

Ahora supongamos, sin perdida de generalidad, que p_1 es el mayor de los números primos $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{10}$, luego como los 10 primos más pequeños son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 y 29, concluimos que $p_1 \geq 29$.
Por otra parte, como los primos p_1, p_2, p_3, p_4 dividen a N_1, entonces $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4$ dividen a N_1, y como $N_1 < 5005$, tenemos que $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \leq N_1 < 5005$. Luego, $p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 < 173$. Análogamente considerando a N_2, tenemos que $p_5 \cdot p_6 \cdot p_7 < 173$. Ahora, multiplicando las desigualdades anteriores obtenemos que, $p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 \cdot p_6 \cdot p_7 < 173^2$, pero $p_2, p_3, p_4, \ldots, p_7$ son primos distintos, entonces

$$30030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \leq p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 \cdot p_6 \cdot p_7 < 173^2 = 29929,$$

que es una contradicción. Por lo tanto, Juan no puede escribir 5 o más números.
Finalmente, vemos que si Juan escribe los números

$$N_1 = 2 \cdot 3 \cdot 5, \quad N_2 = 2 \cdot 7 \cdot 11, \quad N_3 = 3 \cdot 7 \cdot 13, \quad N_4 = 5 \cdot 11 \cdot 13,$$

estos satisfacen las tres condiciones del problema.

Solución del problema 6. Sí existe. Consideremos el caso donde el 100-ágono está construido con varitas de longitudes: $1, 1, 2, 2^2, \ldots, 2^{97}, 2^{98}, 2^{99} - 1$. En primer lugar, observamos que, dado que $1 + 1 + 2 + \cdots + 2^{98} = 2^{99} > 2^{99} - 1$, sí es posible construir un 100-ágono con lados de dichas medidas.
Ahora, veamos que no es posible construir un polígono con cualquier cantidad menor de estas varitas. Para ello consideremos una colección cualquiera con menos de 100 de estas varitas y distinguimos dos casos:

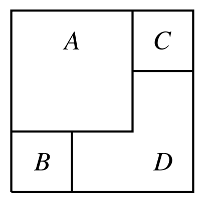
- La varita de longitud $2^{99} - 1$ está entre las seleccionadas.- En este caso y aunque el lado más corto sea el único que no se hubiese escogido, tenemos que, $1 + 2 + \cdots + 2^{98} = 2^{99} - 1$.

- La mayor de las varitas seleccionadas tiene longitud 2^k, $1 \leq k \leq 98$.- En este caso tenemos que $1 + 2 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1$

Como puede observarse, en cualquiera de los casos, la suma de los lados cortos nunca alcanza a superar la medida del lado mayor, es decir 2^{99-1}, lo anterior implica la imposibilidad de construir el polígono.

Solución del problema 7. Sí es posible. Sean $a = 10^{66}$, $b = 2a$, $c = 3a$ y $d = 4a$, entonces $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3)(100^{33})^3 = 100^{100}$.

Solución del problema 8. Para acotar los valores de M dividamos el tablero en cuatro zonas como indica la figura, y a cada una de ellas se le asigna la suma de todas las monedas que están en dicha zona.



Como los tableros de 2×2 de Frida contienen 50 centavos, $A = 50$. Como B y C contienen una sola moneda, entonces $10 \leq B \leq 20$ y $10 \leq C \leq 20$. Como D contiene tres monedas entonces $D \geq 30$, y como le falta una moneda para tener 50 centavos, entonces $30 \leq D \leq 40$. Luego, $100 \leq M \leq 130$. Como M es múltiplo de 10, entonces $M = 100, 110, 120$ o 130, es decir, M puede tomar 4 valores diferentes. Veamos un ejemplo para cada caso:

10	10	10
10	20	10
10	10	10

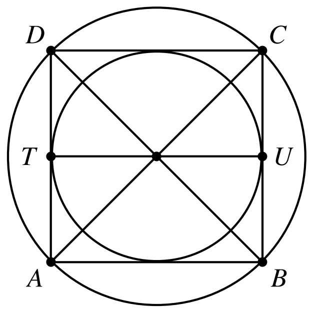
10	20	10
10	10	10
10	20	10

20	10	10
10	10	20
20	10	10

20	10	20
10	10	10
20	10	20

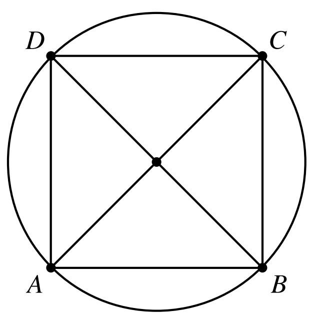
Solución del problema 9. Para este problema tenemos que considerar tres casos. Usaremos que un cuadrilátero convexo $ABCD$ tiene una circunferencia inscrita (esto es, tangente interiormente a sus cuatro lados) si y sólo si $AB + CD = BC + DA$ (ver en el apéndice el teorema 24).

1. Si I coincide con O. Sean T y U los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados DA y BC, respectivamente.

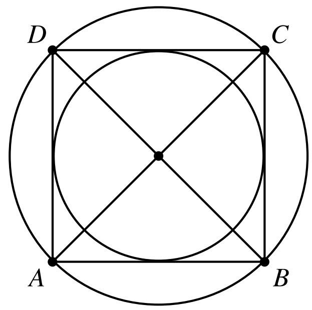


Tenemos que los triángulos IDT, IAT, ICU y IBU son congruentes por ser triángulos rectángulos, y tener la hipotenusa y un cateto iguales. Luego $DA = BC$ y análogamente tenemos que $AB = CD$. Como $AB + CD = BC + DA$ llegamos a que los cuatro lados son iguales y como el cuadrilátero es cíclico tenemos que es un cuadrado.

2. Si O coincide con S. En este caso tenemos que $SA = SB = SC = SD$, de donde $ABCD$ es un rectángulo y concluimos como el caso anterior.

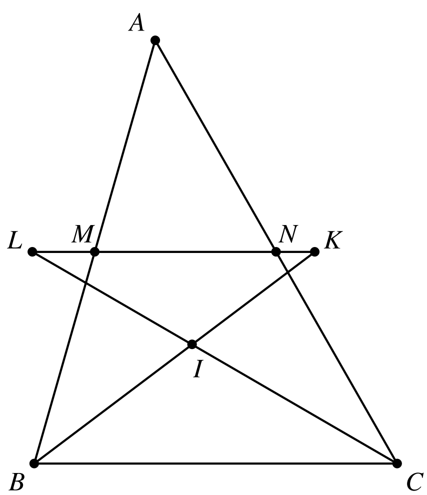


3. Si S coincide con I. Por ángulos en el cíclico $ABCD$ tenemos que los triángulos IDA y ICB son semejantes. Como la altura desde I en esos triángulos es la misma (pues es radio de la circunferencia inscrita) tenemos que los triángulos son congruentes y $DA = BC$. Análogamente $AB = CD$ y concluimos de la misma manera.



Solución del problema 10. Sea H el hombre que bailó con más mujeres. Como ninguno bailó con todas, debe existir una mujer M' que no bailó con él. Sea H' un hombre que bailó con M' (existe por hipótesis). Resta encontrar una mujer M que bailó con H y que no bailó con H'. Dicha mujer existe, pues si todas las mujeres que bailaron con H también bailaron con H', como H' también bailó con M', H' hubiera bailado con más mujeres que H, lo cual sería una contradicción. Luego, existe dicha mujer M y terminamos.

Solución del problema 11. Como las rectas MN y BC son paralelas, tenemos que $\angle MKB = \angle KBC = \angle ABK$ (pues BK es bisectriz del ángulo en B). Luego, $MK = MB = \frac{BA}{2}$. De la misma manera llegamos a que $NL = NC = \frac{AC}{2}$.



Por la desigualdad del triángulo tenemos que $AI + BI > AB$, $BI + CI > BC$ y $CI + AI > CA$. Sumando estas desigualdades llegamos a que $AI + BI + CI > \frac{AB+BC+CA}{2}$. Por otro lado, tenemos que

$$KL = LN + MK - MN = \frac{AB + BC}{2} - MN.$$

Como M y N son puntos medios, $MN = \frac{BC}{2}$, y por lo tanto

$$AI + BI + CI > \frac{AB + BC + CA}{2} = KL + MN + \frac{BC}{2} = KL + BC.$$

Solución del problema 12. Sea $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$ la sucesión ya reordenada. En primer lugar, observamos que la *operación* cambia la *paridad* de la suma de los dígitos del siguiente término. Es decir, si la suma de los dígitos de b_k es par/impar, entonces la suma de los dígitos de b_{k+1} es impar/par respectivamente.
Supongamos que ambos términos, b_k y b_{k+10}, permanecen en sus lugares originales. Inmediatamente, por su posición original, notamos que las paridades de las sumas de los dígitos de b_k y b_{k+10} deben ser diferentes. Por otro lado, para obtener b_{k+10} a partir de b_k, es necesario cambiar la paridad de la suma de sus dígitos en un número par de veces (10 veces); por lo que las paridades en cuestión deberían ser las mismas. Esto implica que el máximo número de términos que pueden permanecer en su lugar no excede los 50. Para concluir que son exactamente 50, presentamos el siguiente arreglo en el que se alcanza esta cota máxima:

$$00 \nearrow 09, 19 \searrow 10, 20 \nearrow 29, 39 \searrow 30, 40 \nearrow 49, 59 \searrow 50, 60 \nearrow 69, 79 \searrow 70, 80 \nearrow 89, 99 \searrow 90$$

Solución del problema 13. El lado más largo de este polígono medirá al menos $\frac{2001}{1415}$, por lo que la suma de los otros 1414 lados es a lo más $2001 - \frac{2001}{1415} = \frac{1414 \cdot 2001}{1415}$. Dividimos estos 1414 lados en 707 parejas de lados cosecutivos. Una de ellas cumplirá que la suma de las longitudes de esos lados es a lo más $\frac{1414 \cdot 2001}{1415 \cdot 707} = \frac{2 \cdot 2001}{1415} < 2\sqrt{2}$ (para ver esto, basta elevar al cuadrado).
Así, hay dos lados consecutivos AB y BC tales que $AB + BC < 2\sqrt{2}$. Por lo tanto, si denotamos por (ABC) al área del triángulo ABC, tenemos que

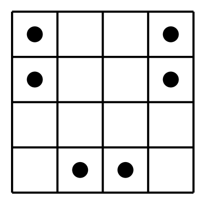
$$(ABC) = \frac{AB \cdot BC \operatorname{sen}(\angle ABC)}{2} \leq \frac{AB \cdot BC}{2} \leq \frac{(\frac{AB+BC}{2})^2}{2} < \frac{(2\sqrt{2})^2}{8} = 1,$$

ya que sen $x \leq 1$ y $AB \cdot BC \leq (\frac{AB+BC}{2})^2$ por la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica (ver en el apéndice el teorema 8).

Solución del problema 14. Sean a y b enteros tales que $a^2 = 3x + 4y$ y $b^2 = 4x + 3y$. Como $(3x + 4y) + (4x + 3y) = 7(x + y)$, tenemos que 7 divide a $a^2 + b^2$. Notamos que los residuos de un cuadrado al dividirse entre 7 son 0, 1, 2 o 4 y como los únicos que suman 0 módulo 7, son 0 y 0 tenemos que 7 divide a a^2 y a b^2. Como 7 es primo, tenemos que 7^2 divide a $a^2 + b^2 = 7(x + y)$. Luego, 7 divide a $x + y$.

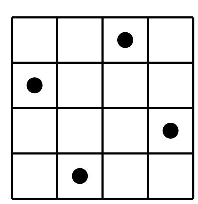
Por otro lado, como 7 divide a a^2 y a b^2, tenemos que 7 divide a $b^2 - a^2 = x - y$. Ahora, como 7 divide a $x + y$ y a $x - y$, también divide $2x$ y como 7 es coprimo con 2, 7 divide a x. Finalmente como 7 divide a $x + y$, también divide a y.

Solución del problema 15. Veamos que el menor valor posible de n es 6. Si hacemos los seis movimientos marcados llegamos a que todos los cuadrados son negros.

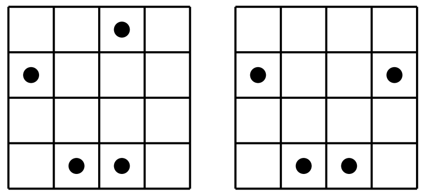


Notamos que los cuadrados de las esquinas cambian el estado de 2 cuadrados, los cuadrados de las orillas cambian el estado de 3 cuadrados y los cuadrados del centro cambian el estado de 4 cuadrados. Como el estado de cada una de las esquinas debió cambiarse al menos una vez y un movimiento no puede cambiar el estado de dos esquinas, debe haber al menos cuatro movimientos (y cada uno de ellos debe cambiar el estado de cada una de las esquinas). Como estos cuadrados están en la orilla, cambian el estado de tres cuadrados. Con ellos se cambia el estado de a lo más 12 cuadrados. Como tenemos 16 hace falta al menos un quinto movimiento.

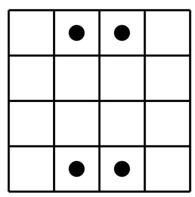
Para que sea posible con 5, es necesario que el quinto movimiento sea de los del centro, pues es necesario que cambie el estado de cuatro cuadrados, para completar 16. Además, todos los cuadrados debieron haber sido cambiados exactamente una sola vez. Si los cuatro que cambian el estado de las esquinas están en orillas diferentes, debe ser un acomodo como el siguiente.



En este acomodo, esos cuatro cuadrados tendrían que ser cambiados en el quinto movimiento, lo cual es imposible. Ahora, si hay exactamente un lado con dos de esos cuatro cuadrados, solo se puede hacer en cualquiera de estas dos maneras.

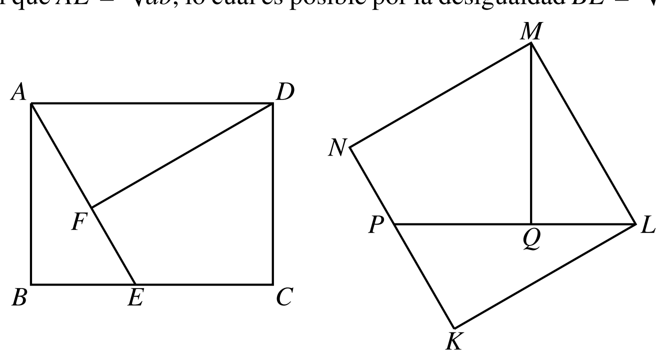


Si este es el caso, nuevamente el quinto movimiento deberá cambiar los dos cuadrados de arriba y eso es imposible. Finalmente, si hay exactamente dos lados con dos de los primeros cuatro movimientos, debe ser así.



Si este es el caso, el quinto movimiento debería cambiar los estados de los cuadrados de las otras dos orillas y esto vuelve a ser imposible. Luego, no es posible lograrlo con cinco movimientos y el mínimo buscado es 6.

Solución del problema 16. Sean A, B, C y D los vértices del rectángulo, donde $AB = a$ y $BC = b$. Observemos que $a < b$ implica que $a < \sqrt{ab} < b$. Escogemos un punto E sobre BC tal que $AE = \sqrt{ab}$, lo cual es posible por la desigualdad $BE = \sqrt{ab - a^2} < b$.



Sea F el punto sobre la recta AE tal que AE es perpendicular a DF. Calculando el área del triángulo AED de dos formas distintas, obtenemos que $\frac{1}{2}AE \cdot DF = \frac{1}{2}AD \cdot CD$. Entonces $FD = \frac{ab}{\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$. Dado que $AF = \sqrt{b^2 - ab} < \sqrt{ab} = AE$ (debido a la desigualdad $b < 2a$), el punto F está sobre AE y ubicado entre A y E. Por último, observamos que el triángulo ABE, el triángulo AFD y el cuadilátero $DFEC$ pueden ser reacomodados como cuadrado por traslaciones paralelas del triángulo ABE en el triángulo MQL y del triángulo ADF en el triángulo PLK.

Solución del problema 17.

1. La primera operación es obligada, $0100\ldots \to 10100\ldots$ A partir de entonces, elegimos el último 1 y queda $111\ldots10100\ldots0 \to 111\ldots11010\ldots0$, donde se "corrió" a la derecha el último 1 y disminuyó en 1 la cantidad final de ceros. Repetimos hasta tener todos 1 y un 0: $11\ldots1011$. Si ahora elegimos el penúltimo 1 queda $11\ldots1100$, o sea 99 unos consecutivos y dos ceros. Los 99 unos los ponemos en grupos de 3 consecutivos, 111, y operamos sobre el central. Con esto se cumple el objetivo de llevar los 99 unos a ceros.

2. Supongamos que es posible obtener todos 0. Sea a_i el número de veces que se hace la operación con centro en A_i. Agrupamos

$$(A_1A_2A_3)(A_4A_5A_6)\ldots(A_{100}A_{101}A_{102}).$$

Tenemos que $a_1+a_2+a_3$ es par, pues es el número de veces que cambia A_2, que inicialmente es 0. Lo mismo ocurre con $a_4+a_5+a_6$, $a_7+a_8+a_9$, etc. Entonces, $S = a_1+a_2+\cdots+a_{102}$ es suma de pares, luego es par. Por otra parte, si agrupamos $(A_{102}A_1A_2)(A_3A_4A_5)\ldots$, todo es como antes, excepto $a_{102}+a_1+a_2$ que cuenta el número de cambios de A_1, que como es inicialmente 1 debe cambiar un número impar de veces para terminar en 0. Luego, $a_{102}+a_1+a_2+\cdots+a_{101}$ es impar (un impar más todos pares), lo que es una contradicción.

Solución del problema 18. De manera más general tenemos que

$$\begin{aligned}(n \wedge (n \wedge n)) \wedge n &= (n^{n\wedge n})^n = (n^n)^{n\wedge n}\\ &= (n \wedge n) \wedge (n \wedge n).\end{aligned}$$

Agregando tres términos más (con sus respectivos juegos de paréntesis), de cada lado, la igualdad se conserva y tenemos la solución buscada.

Solución del problema 19.

1. Observemos que si k es par, entonces $b^k + c^k \equiv 2 \pmod 4$, es decir $2^2 \nmid b^k + c^k$ para todo entero positivo k par. Supongamos ahora que k es impar. Sea 2^r la mayor potencia de 2 que divide a $b+c$, $(r \geq 1)$. Como:

$$b^k + c^k = (b+c)(\underbrace{b^{k-1} - b^{k-2}c + \cdots - bc^{k-2} + c^{k-1}}_{k \text{ términos impares}})$$

y el factor $b^{k-1} + b^{k-2}c + \cdots + c^{k-1}$ es impar, entonces 2^r es la mayor potencia de 2 que divide a $b^k + c^k$.
Tomamos $n = r+1$. Si k es par, como $n \geq 2$, entonces $2^n \nmid b^k + c^k$; si k es impar, como $n > r$ entonces $2^n \nmid b^k + c^k$, pues 2^r es la mayor potencia de 2 que divide a $b^k + c^k$ para todo k impar. Por lo tanto, hemos encontrado n tal que $2^n \nmid b^k + c^k$ para todo entero positivo k.

2. Consideremos el n del inciso anterior y para $1 \leq i \leq n$, sea 2^{r_i} la mayor potencia de 2 que divide a $a^i + b^i + c^i$. Demostraremos que $N = \text{máx}\{r_1, \ldots, r_n, n\} + 1$ cumple lo requerido.
   Si $k \leq n$, como $N > r_k$ entonces $2^N \nmid a^k + b^k + c^k$.
   Si $k > n$, entonces $2^n \mid 2^k$, y como $2^k \mid a^k$ entonces $2^n \mid a^k$, pero $2^n \nmid b^k + c^k$. Entonces $2^n \nmid a^k + b^k + c^k$, y como hemos tomado $N > n$ se sigue que $2^N \nmid a^k + b^k + c^k$.

Solución del problema 20. Observemos que $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$ y $c = \frac{1}{2}$ satisfacen la igualdad $a^2 + b^2 + c^2 = 2abc + 1$, de modo que con estos valores de a, b y c obtenemos que $(a - 2bc)(b - 2ca)(c - 2ab) = \frac{1}{8}$. Luego, necesitamos sólo considerar el caso $(a - 2bc)(b - 2ca)(c - 2ab) > 0$. En este caso, alguno de los números $a - 2bc$, $b - 2ca$, $c - 2ab$ debe ser positivo. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a - 2bc > 0$. Usando la desigualdad media aritmética - media geométrica, tenemos que

$$1 + 2abc = a^2 + b^2 + c^2 \geq a^2 + 2bc,$$

de donde

$$\begin{aligned} 1 - a^2 + 2abc - 2bc &\geq 0 \\ (1 - a)(1 + a) - 2bc(1 - a) &\geq 0 \\ (1 - a)(1 + a - 2bc) &\geq 0. \end{aligned}$$

Como $1 + a - 2bc > 0$, se sigue que $a \leq 1$. De aquí, $-1 < 2a - 1 \leq 1$ y por lo tanto $(2a - 1)^2 \leq 1$. Aplicando nuevamente la desigualdad media aritmética - media geométrica tenemos que

$$(b - 2ca)(c - 2ab) = bc - 2a(b^2 + c^2) + 4a^2bc \leq bc - 4abc + 4a^2bc = bc(2a - 1)^2 \leq bc.$$

Por lo tanto,

$$(a - 2bc)(b - 2ca)(c - 2ab) \leq bc(a - 2bc) \leq bc(1 - 2bc) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2bc + (1 - 2bc)}{2}\right)^2 = \frac{1}{8},$$

y así el valor máximo del producto $(a - 2bc)(b - 2ca)(c - 2ab)$ es $\frac{1}{8}$.

Problemas de Entrenamiento

Tzaloa se construye con el esfuerzo de toda la comunidad olímpica y esta sección está especialmente diseñada para la paticipación de sus lectores. De esta manera, en cada número presentamos 10 problemas sin solución e invitamos a nuestros lectores para que preparen y nos envíen sus soluciones con el fin de publicarlas.

Para dar suficiente tiempo a la preparación, envío y análisis de las soluciones, las respuestas de los problemas de entrenamiento de cualquier número de la revista, se publican con tres números de diferencia. Es así, que en este número (Tzaloa 3, año 2013), encontrarás las respuestas de los problemas propuestos en Tzaloa 4, año 2012. Las respuestas de los problemas propuestos en esta ocasión, se publicarán en Tzaloa 2, año 2014, por lo que tienes tiempo más que suficiente para preparar y enviarnos tu trabajo. Recuerda que nuestra dirección electrónica es `revistaomm@gmail.com` y que a través de ella estaremos recibiendo con gusto todas las contribuciones que nos lleguen desde cualquier rincón del país.

Problemas de Entrenamiento.
Año 2013 No. 3.

Problema 1. Sean a y b números reales positivos tales que $a^3 = a + 1$ y $b^6 = b + 3a$. Demuestra que $a > b$.

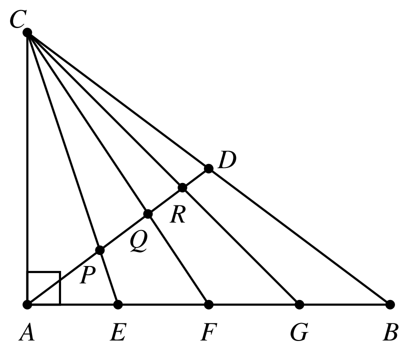
Problema 2. Un número de cuatro dígitos $abcd$, se dice que es *defectuoso* si el producto de sus dos últimos dígitos c y d es igual al número de dos dígitos ab, y si el producto de los dígitos $c - 1$ y $d - 1$ es igual al número de dos dígitos ba. Encuentra todos los números defectuosos.

Problema 3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que $\angle BAC = 30°$, $\angle CAD = 20°$, $\angle ABD = 50°$ y $\angle DBC = 30°$. Sea P la intersección de las diagonales de $ABCD$. Demuestra que $PC = PD$.

Problema 4. Determina todos los enteros positivos n tales que $n + 1$ se pueda expresar como la suma de tres divisores positivos de n distintos entre sí.

Problema 5. ¿Existen 16 enteros positivos de tres dígitos que usen entre todos solamente tres dígitos distintos, tales que todos dejen un residuo diferente al ser divididos entre 16?

Problema 6. En el triángulo rectángulo ABC, sean D el punto medio de BC, F el punto medio de AB, E el punto medio de AF y G el punto medio de FB. Si AD intersecta a CE, CF y CG en P, Q y R, respectivamente, determina la razón $\frac{PQ}{QR}$.



Problema 7. Ana y Beto juegan el siguiente juego. En la mesa hay 2013 fichas y cada jugador en su turno debe tomar algunas fichas. Puede tomar al menos una ficha o a lo más la mitad de las fichas que quedaron en la mesa al momento de su turno. El jugador que deje en la mesa exactamente una ficha pierde el juego. Si Ana es la primera en tomar fichas, determina para cuál de los jugadores existe una estrategia ganadora y descríbela.

Problema 8. Se tiene un pentágono de papel, $ABCDE$, tal que

$$AB = BC = 3\,cm, \quad CD = DE = 5\,cm, \quad EA = 4\,cm, \quad \angle ABC = 100^\circ, \quad \angle CDE = 80^\circ.$$

Divide el pentágono en cuatro triángulos, mediante tres cortes rectos, de manera que con los cuatro triángulos se arme un rectángulo, sin superposiciones ni huecos. (Los triángulos se pueden girar y/o dar la vuelta.)

Problema 9. Demuestra que los números enteros del 1 al 16 pueden ser distribuidos en un tablero de 4×4, uno en cada casilla, de tal manera que la suma de los números escritos en cualesquiera dos casillas vecinas sea un número primo. ¿Se cumpliría lo mismo si en lugar de los números del 1 al 16 se distribuyen los números del 2 al 17? (Nota: Dos casillas son vecinas si tienen un lado en común.)

Problema 10. Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo. Demuestra que

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} \leq 3.$$

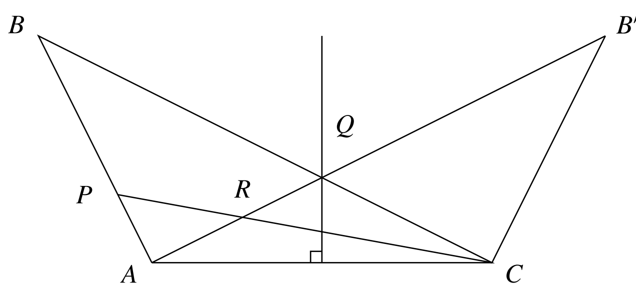
Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2012 No. 4.

A continuación presentamos las soluciones de los *Problemas de Entrenamiento*, propuestos en Tzaloa 4, año 2012. En esta ocasión queremos agradecer y felicitar tanto a Siddhartha Emmanuel Morales Guzmán por las soluciones de los problemas 2, 7 y 9, como a José Ramón Tuirán Rangel, quien nos envió soluciones para los problemas 1 y 9. A nombre de la comunidad olímpica, nuestro respeto por su entusiasta participación y original trabajo.
Recuerda que en el próximo número publicaremos las soluciones de los problemas propuestos en Tzaloa 1, año 2013, así que... ¿Qué estás esperando?, prepara tus soluciones y envíalas de inmediato a `revistaomm@gmail.com` ...todavía estás a tiempo para que tus trabajos puedan salir publicados dándote todo el crédito que mereces.

Problema 1. Escogemos a los puntos P y Q sobre los lados AB y BC del triángulo ABC. Sea R el punto de intersección de los segmentos AQ y CP. Suponiendo que $AQ = QC$ y $AB = RC$, demuestra que los puntos B, P, Q y R están en una misma circunferencia.

Solución de José Ramón Tuirán Rangel. Por el Teorema de Menelao[1] aplicado en el triángulo PBC, tenemos que $\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RP}\cdot\frac{PA}{AB} = 1$. Como $AB = CR$, tenemos que $\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{PA}{RP} = 1$; entonces $\frac{BQ}{QC} = \frac{RP}{AP}$. Pero $QC = AQ$ y por lo tanto, $\frac{BQ}{AQ} = \frac{RP}{AP}$.
Ahora, los triángulos ABQ y ARP son semejantes por el criterio de semejanza LAL, pues comparten el ángulo BAQ. Entonces, por ser semejantes, se sigue que $\angle ABQ = \angle ARP$, es decir, $\angle ABQ + \angle PRQ = 180°$, pues $\angle ARP + \angle PRQ = 180°$, lo que indica que el cuadrilátero $BPQR$ es cíclico.

Solución alternativa. Sea B' el punto simétrico de B con respecto de la recta perpendicular a AC trazada desde Q.



Como el triángulo ABQ es congruente con el triángulo $CB'Q$ tenemos que $\angle ABC = \angle AB'C$. Además, $RC = AB = B'C$, entonces $\angle AB'C = \angle CRB'$. De lo anterior se sigue que $\angle PRQ = 180° - \angle PBQ$, y por lo tanto el cuadrilátero $BPRQ$ es cíclico.

Problema 2. Sean a, b y c números reales positivos tales que $a^2+b^2+c^2 = 1$. Demuestra

[1] Ver en el apéndice el teorema 21.

que,

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 3+\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}.$$

Solución de Siddartha Emmanuel Morales Guzmán. Como, $a^2+b^2+c^2=1$, tenemos que,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} &= \frac{a^2+b^2+c^2}{a^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{b^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{c^2}\\ &= 3+\frac{b^2+c^2}{a^2}+\frac{a^2+c^2}{b^2}+\frac{a^2+b^2}{c^2}.\end{aligned}$$

Entonces la desigualdad podemos escribirla como,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} &\geq 3+\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}\\ \frac{b^2+c^2}{a^2}+\frac{a^2+c^2}{b^2}+\frac{a^2+b^2}{c^2} &\geq \frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}.\end{aligned}$$

Sumando las tres fracciones y multiplicando por $(abc)^2$ nos queda,

$$\begin{aligned}b^2c^2(b^2+c^2)+a^2c^2(c^2+a^2)+a^2b^2(a^2+b^2) &\geq 2(abc)(a^3+b^3+c^3)\\ b^4c^2+c^4b^2+c^4a^2+a^4c^2+a^4b^2+b^4a^2 &\geq 2(a^4bc+b^4ac+c^4ab),\end{aligned}$$

pero esta desigualdad es equivalente a $[4,2,0]\geq[4,1,1]$ la cual se sigue por el teorema de Muirhead[2].

Solución alternativa. Tenemos que,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-3-\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc} &= \frac{a^2+b^2+c^2}{a^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{b^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{c^2}\\ &- 3-2\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)\\ &= a^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+b^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)+c^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\\ &- 2\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)\\ &= a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2\\ &\geq 0,\end{aligned}$$

ya que cada sumando de la última expresión es no negativo.
Como a,b y c son positivos, la igualdad se da si y sólo si $\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=\frac{1}{c}-\frac{1}{a}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=0$, lo que es equivalente con $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ y por lo tanto $a=b=c$.

[2]Ver pág. 44 de [4] en la bibliografía.

Problema 3. Sean f y g dos funciones tales que $g(f(x)) = x$ y $f(g(y)) = y$ para cualesquiera números reales x y y. Supongamos que para todo número real x, $f(x) = kx + h(x)$ donde $k \neq 0$ es una constante y $h(x)$ es una función periódica. Demuestra que $g(x)$ siempre puede ser expresada como la suma de una función lineal más una función periódica. (Decimos que una función h es periódica, si existe un número real $p \neq 0$ tal que $h(x + p) = h(x)$ para cualquier número real x.)

Solución. Sea $y = f(x) = kx + h(x)$ y sea p el periodo de la función h, entonces $y+kp = k(x+p)+h(x+p) = f(x+p)$. De aquí, se sigue que $g(y+kp) = x+p = g(y)+p$. Definamos $i(y) = g(y) - \frac{y}{k}$. Entonces,

$$i(y + kp) = g(y + kp) - \tfrac{y+kp}{k} = g(y) + p - \tfrac{y}{k} - p = i(y).$$

Por lo tanto, $i(y)$ es una función periódica y $g(y) = \frac{y}{k} + i(y)$.

Problema 4. Tres personas juegan el siguiente juego. N canicas se colocan en un recipiente y los jugadores pueden tomar, en su turno, 1, 2 o 3 canicas. Pierde la persona que toma la última canica. ¿Para qué valores de N, pueden el primer y tercer jugador trabajar juntos para forzar a que el segundo jugador pierda?

Solución. Denotemos por A, B y C al primer, segundo y tercer jugador, respectivamente.

1. Si $N = 2, 3$ o 4, claramente A puede hacer que B pierda al tomar 1, 2 o 3 canicas, respectivamente.

2. Si $N = 5$ o 6, A y C no pueden forzar a que B pierda porque él puede tomar siempre un número de canicas que complementen a 4 las que tomó A, y forzar a que A o C pierdan. Es decir, si $N = 5$ pierde C, y si $N = 6$ pierde A.

3. Si $N > 6$, veamos qué estrategia deben utilizar A y C para forzar a B a perder. En la primera jugada, A puede tomar 1 canica, dejando $N - 1$ canicas en el recipiente. Después de la primera jugada de B, en el recipiente quedarán k canicas, donde $N - 4 \leq k \leq N - 2$. Luego, $k \geq 3$. Entonces veamos que si los jugadores A y C conspiran para siempre dejar k' canicas, donde $k' \equiv 1 \pmod 5$, el jugador B perderá. Esto es siempre posible porque la suma del número de canicas que pueden tomar A y C puede ser: 2, 3, 4, 5 o 6 y entonces $k \equiv 0, 1, 2, 3, 4 \pmod 5$, luego deberían buscar obtener, entre los dos, una suma de 4, 5, 6, 2 y 3, respectivamente. Por ejemplo, si $k \equiv 0 \pmod 5$, entonces entre A y C buscarán obtener una suma de 4, y en el siguiente turno cuando le toque a B, habrá en el recipiente $k' = k - 4$ canicas, donde $k - 4 \equiv -4 \equiv 1 \pmod 5$. Análogamente, si $k \equiv 1 \pmod 5$, entonces entre A y C buscarán obtener una suma de 5, y en el siguiente turno cuando le toque a B, habrá en el recipiente $k' = k - 5$ canicas, donde $k - 5 \equiv -4 \equiv 1 \pmod 5$. Como $k \geq 3$, lo anterior siempre puede suceder.

   Para las siguentes jugadas, A y C jugarán de manera que cada tres turnos (B, C y A) la suma de canicas extraídas sea 5. Así siempre dejarán un número de canicas congruente con 1 (módulo 5) y eventualmente B perderá.

Problema 5. Sea $ABCD$ un tetraedro en el cual la suma de las áreas de las caras ABC y ABD es igual a la suma de las áreas de las caras CDA y CDB. Demuestra que los puntos medios de BC, AD, AC y BD están sobre un mismo plano que pasa por el incentro de $ABCD$.

Solución. En lo que sigue usaremos la notación $[P]$ para referirnos al área del polígono P. Sea $S = [ABC] + [ABD] = [ACD] + [BCD]$, V el volumen del tetraedro y r su inradio. Entonces $V = \frac{r}{3}([ABC] + [ABD] + [ACD] + [BCD])$, de donde se sigue que $r = \frac{3V}{2S}$. Sean E, F, G y H los respectivos puntos medios de BC, AC, AD y BD. Sean a, b, c y d las alturas de las caras ACD, BCD, ABC y ABD desde A, B, C y D respectivamente. Entonces $S = [ABC] + [ABD] = \frac{1}{2}AB(c + d)$ y $2S = AB(c + d)$. De forma análoga, podemos concluir que $2S = CD(a + b)$. Dado que EF y GH son ambos paralelos con AB y que EH y FG son ambos paralelos con CD, tenemos que $EFGH$ es un paralelogramo. Ahora, trazamos una recta entre EF y GH paralela con ambos y tal que sus distancias con EF y GH estén en razón $c : d$. Análogamente trazamos la paralela con EH y FG y tal que sus distancias respectivas con EH y FG estén en razón $b : a$. Sea I el punto de intersección de estas rectas. Observamos que la altura de ABC trazada desde D es igual a $\frac{3V}{[ABC]}$. Por lo tanto, la distancia desde G o desde H a la cara ABC es $\frac{3V}{cAB}$ y la distancia desde I a ABC es $\frac{3V}{cAB} \cdot \frac{c}{c+d} = \frac{3V}{2S}$. De igual forma tenemos que la distancia desde I a ABD, ACD y BCD son iguales a $\frac{3V}{S}$. De aquí se sigue que I coincide con O, por lo tanto los puntos O, E, F, G y H son coplanares.

Problema 6. Sean k y n enteros positivos. Adán piensa que si k divide a $(n-1)(n+1)$, entonces k divide a $n-1$ o a $n+1$. Encuentra todas las k para las cuales la conclusión de Adán es correcta.

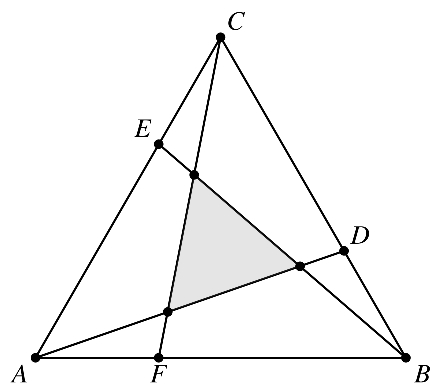
Solución. Si k es un número primo, la conclusión es cierta.
Si $k = 4$ la conclusión también es cierta. Ya que si $4 \mid (n-1)(n+1)$ se tendría que n es impar. Luego, $n-1$ y $n+1$ son dos pares consecutivos, y alguno tiene que ser múltiplo de 4.
Ahora, si $k = p^a$ con p un primo impar y $p^a \mid (n-1)(n+1)$. Como $p \geq 3$, p no puede dividir a $n-1$ y a $n+1$ al mismo tiempo, por lo que alguno tiene que ser múltiplo de p^a.
De la misma manera, si $k = 2p^a$ la conclusión es cierta. Si $2p^a \mid (n-1)(n+1)$ se tiene que $2 \mid (n-1)(n+1)$, de donde n es impar. Además, $p^a \mid (n-1)(n+1)$ de donde p^a divide a $n-1$ o a $n+1$. Como estos números son pares, tenemos que $2p^a$ divide a $n-1$ o a $n+1$.
Si $k = 2^a \cdot M$ con $a \geq 2$ y M impar. Veamos que la conclusión no necesariamente es cierta. Tomemos un n tal que $n \equiv 1 \pmod{2^a}$ y $n \equiv -1 \pmod{M}$ (una manera de ver que existe una n que cumple estas congruencias es usando el teorema chino del residuo[3]). Con esta n se tiene que 2^aM divide a $(n-1)(n+1)$. Como $n-1$ es múltiplo de 4, $n+1$ no lo es y $2^a \cdot M$ no divide a $n+1$. También, como el máximo común divisor de $n-1$ y $n+1$ es 1 o 2 (¿por qué?), M es primo relativo con $n-1$ y 2^aM no divide a $n-1$. Luego, la conclusión no se sigue.

[3]Ver en el apéndice el teorema 5.

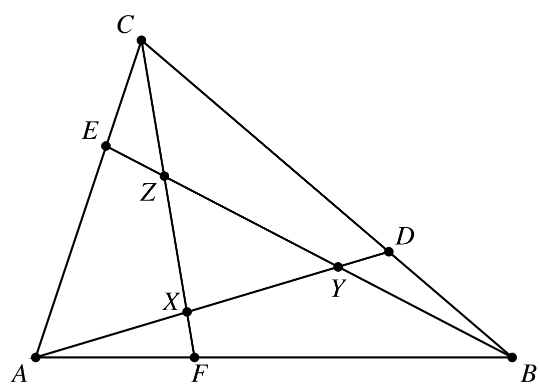
Finalmente, si $k = M \cdot N$ con M y N impares primos relativos mayores que 1. Veamos que tampoco se sigue la conclusión. Tomemos una n tal que $n \equiv 1 \pmod{M}$ y $n \equiv -1 \pmod{N}$. Con esta n se tiene que $k \mid (n-1)(n+1)$. Como M es impar, $n-1$ es múltiplo de M y el máximo común divisor de $n-1$ y $n+1$ es 1 o 2, M es primo relativo con $n+1$ y k no divide a $n+1$. De la misma manera k no divide a $n-1$. Luego, la conclusión no se sigue.

Así que podemos concluir que las k que funcionan son 2, 4, p^a y $2p^a$ con p un primo impar y a un entero positivo.

Problema 7. En el siguiente triángulo equilátero se tiene que $\frac{AE}{EC} = \frac{CD}{DB} = \frac{BF}{FA} = 2$. Si el área del triángulo ABC es $1\ \text{cm}^2$, ¿cuánto vale el área sombreada?



Solución de Siddhartha Emmanuel Morales Guzmán. Sean X, Y y Z los vértices del triángulo interior. Veamos que no es necesario que sea un triángulo equilátero.



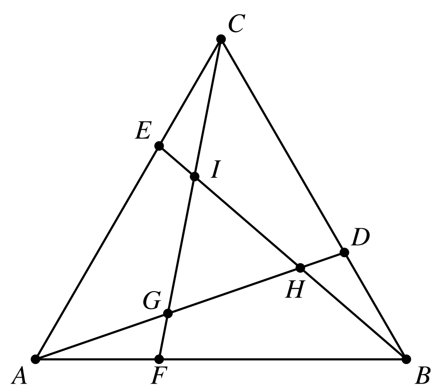
Aplicando el Teorema de Menelao[4] en el triángulo BCF con la recta AD tenemos que

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CX}{XF} \cdot \frac{FA}{AB} = 1.$$

Como $\frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}$ y además $AF + FB = AB$, tenemos que $3FA = AB$, o $FA = \frac{1}{3}AB$. Sustituyendo llegamos a que $\frac{CX}{XF} = 6$. Como $CX+XF = CF$ llegamos a que $FX = \frac{1}{7}CD$. Análogamente $YD = \frac{1}{7}AD$ y $ZE = \frac{1}{7}BE$. Ahora, $(XYZ) = (ABC) - [(AXC) + (CZB) + (BYA)]$. Notamos que $(CAF) = \frac{1}{3}(ABC)$ y $(AXC) = (CAF) - (AFX) = (CAF) - \frac{1}{7}(CAF) = \frac{6}{7}(CAF) = \frac{2}{7}(ABC)$. Análogamente $(BYA) = (BZC) = \frac{2}{7}(ABC)$. Finalmente

$$\begin{aligned}
(XYZ) &= (ABC) - [(AXC) + (CZB) + (BYA)] \\
&= (ABC) - \left[\frac{2}{7}(ABC) + \frac{2}{7}(ABC) + \frac{2}{7}(ABC)\right] \\
&= \frac{1}{7}(ABC) = \frac{1}{7}\ \text{cm}^2.
\end{aligned}$$

Solución alternativa. Sean G, H e I los vértices del triángulo sombreado como se muestra en la figura.



Sean $x = (GHI)$, $y = (GFBH)$ y $z = (AFG)$ (donde (ABC) denota el área del triángulo ABC). Por simetría se tiene que

$$(HDCI) = (IEAG) = (GFBH) = y \quad \text{y} \quad (BDH) = (CEI) = (AFG) = z.$$

Los triángulos CAF y CFB comparten la altura desde C, luego,

$$\frac{(CAF)}{(CFB)} = \frac{AF}{FB} = \frac{1}{2}.$$

Sustituyendo tenemos que

$$\frac{y + 2z}{x + 2y + z} = \frac{1}{2},$$

[4]Ver en el apéndice el teorema 21.

de donde $x = 3z$.
Ahora, por el Teorema de Menelao[5] en el triángulo DAB y los puntos G, F y C se tiene que
$$\frac{DG}{GA} \cdot \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BC}{CD} = -1.$$
Como $\frac{AF}{FB} = \frac{1}{2}$ y $\frac{BC}{CD} = \frac{3}{2}$ se tiene que $\frac{DG}{GA} = \frac{4}{3}$. Con la misma idea, como los triángulos CAG y CGD comparten la altura desde C, la razón entre sus áreas es igual a $\frac{AG}{GD}$. Sustituyendo tenemos que
$$\frac{y+z}{y+3z} = \frac{3}{4},$$
de donde $y = 5z$. Finalmente, como el área del triángulo ABC es igual a $21z$ y el área del triángulo GHI es $3z$, tenemos que el área del triángulo GHI es $\frac{1}{7}$ cm^2.

Problema 8. Demuestra que,
$$\sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[4]{4 + \cdots + \sqrt[2012]{2012}}}} < 2.$$

Solución. Sea $S = \sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[4]{4 + \cdots + \sqrt[2012]{2012}}}}$.
Observemos que:
$$\begin{aligned} S &< \sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{4 + \cdots + \sqrt[3]{2012}}}} \\ &= \sqrt{2 + \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{\frac{4}{3^3} + \sqrt[3]{\frac{5}{3^{3^2}} + \cdots + \sqrt[3]{\frac{2012}{3^{3^{2009}}}}}}}} \\ &< \sqrt{2 + \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \cdots + \sqrt[3]{1}}}} \\ &< \sqrt{2 + \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2.5}} \\ &< 2. \end{aligned}$$

La primera desigualdad se sigue de la siguiente propiedad: Si $a > 0$ y $m < n$ (con m y n enteros positivos), entonces $a^{\frac{1}{n}} < a^{\frac{1}{m}}$. En efecto, $m < n \Rightarrow a^m < a^n \Rightarrow (a^m)^{\frac{1}{mn}} < (a^n)^{\frac{1}{mn}}$, es decir, $a^{\frac{1}{n}} < a^{\frac{1}{m}}$.
La segunda desigualdad se sigue porque $\frac{4}{3^3} < 1$, $\frac{5}{3^{3^2}} < 1, \ldots, \frac{2012}{3^{3^{2009}}} < 1$.

La tercera desigualdad se sigue porque $\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1}} = \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{2.5} \Rightarrow \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1}}} < \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{2.5}} < \sqrt[3]{2.5}$ (esta última desigualdad es clara ya que $1 + \sqrt[3]{2.5} < 2.5 \Leftrightarrow 2.5 < 1.5^3$) y por un argumento inductivo se sigue que $\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \cdots + \sqrt[3]{1}}} < \sqrt[3]{2.5}$.
La última desigualdad es equivalente a $2 + \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2.5} < 4 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3(2.5)} < 2 \Leftrightarrow 7.5 < 2^3 = 8$.

[5] Ver en el apéndice el teorema 21.

Problema 9. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ números reales positivos tales que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Demuestra que,

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1} + \frac{a_2^2}{a_2+b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_n+b_n} \geq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{2}.$$

Solución de José Ramón Tuirán Rangel. Aplicando la desigualdad útil[6] tenemos que

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1} + \frac{a_2^2}{a_2+b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_n+b_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{a_1+b_1+a_2+b_2+\cdots+a_n+b_n}.$$

Pero como $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ tenemos que

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1} + \frac{a_2^2}{a_2+b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_n+b_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{2(a_1+a_2+\cdots+a_n)} = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{2},$$

como queríamos.

Este problema también fue resuelto por Siddhartha Emmanuel Morales Guzmán y su solución es esencialmente la misma que la de José Ramón Tuirán Rangel.

Solución alternativa. Sean

$$A = \frac{a_1^2}{a_1+b_1} + \frac{a_2^2}{a_2+b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_n+b_n} \quad \text{y} \quad B = \frac{b_1^2}{a_1+b_1} + \frac{b_2^2}{a_2+b_2} + \cdots + \frac{b_n^2}{a_n+b_n}.$$

Observemos primero que $A = B$, pues

$$\begin{aligned} A - B &= \frac{a_1^2-b_1^2}{a_1+b_1} + \frac{a_2^2-b_2^2}{a_2+b_2} + \cdots + \frac{a_n^2-b_n^2}{a_n+b_n} \\ &= (a_1-b_1) + (a_2-b_2) + \cdots + (a_n-b_n) \\ &= (a_1+a_2+\cdots+a_n) - (b_1+b_2+\cdots+b_n) = 0. \end{aligned}$$

Luego,

$$A = B = \frac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2+b_1^2}{a_1+b_1} + \frac{a_2^2+b_2^2}{a_2+b_2} + \cdots + \frac{a_n^2+b_n^2}{a_n+b_n}\right).$$

Por otra parte, es fácil ver que $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$ para cualesquiera números reales positivos a y b, de donde $\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{a+b}{2}$. Aplicando esta desigualdad a cada término de la suma, se tiene que

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2+b_1^2}{a_1+b_1} + \frac{a_2^2+b_2^2}{a_2+b_2} + \cdots + \frac{a_n^2+b_n^2}{a_n+b_n}\right) \\ &\geq \frac{1}{2}\left(\frac{a_1+b_1}{2} + \frac{a_2+b_2}{2} + \cdots + \frac{a_n+b_n}{2}\right) \\ &= \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{2}. \end{aligned}$$

[6]Ver en el apéndice el teorema 9.

Problema 10. Determina todos los enteros positivos n tales que,

$$\frac{n}{d(n)}$$

sea un número primo.
(Nota: $d(n)$ denota al número de divisores positivos del entero n.)

Solución. Sea $n = p \cdot d(n)$, donde p es un número primo. Consideremos el número $k = d(n)$. Tenemos que $n = pk$, de modo que $k = d(n) = d(pk)$. Primero hallaremos los posibles valores de k y luego los de n.
Como p es primo, observamos que $d(pk) \leq 2d(k)$. En efecto, sean $x_1 = 1 < x_2 < \cdots < x_r = k$ todos los divisores de k, de aquí en adelante, al decir divisores se entenderá divisores positivos. Entonces, todos los números de las sucesiones $x_1, x_2, \ldots, x_r$ y $px_1, px_2, \ldots, px_r$, son divisores de pk. Recíprocamente, cada divisor t de pk está en al menos una de las dos sucesiones (en la segunda si p divide a t, y en la primera si no lo divide). Entonces pk tiene a lo más $r + r = 2r = 2d(k)$ divisores, como se había afirmado. Más precisamente, si p no divide a k entonces $d(pk) = 2d(k)$, pues las sucesiones no tienen ningún número en común. Si p divide a k, entonces $d(pk) < 2d(k)$ pues p figura en ambas sucesiones.
Volviendo al problema, el número k satisface $k = d(n) = d(pk) \leq 2d(k)$. Es decir, $d(k) \geq \frac{k}{2}$, en otras palabras, k tiene al menos $\frac{k}{2}$ divisores. Pero ningún divisor de k es mayor que $\frac{k}{2}$, excepto el propio k. Luego, k tiene al menos $\frac{k}{2} - 1$ divisores en el intervalo $[1, \frac{k}{2}]$.
Para $k = 2l + 1$ impar, $l \geq 1$, esto significa que al menos l números entre $1, 2, \ldots, l$ dividen a k, es decir, todos. Pero 2 no es un tal número pues k es impar; luego $l = 1$ y $k = 3$.
Para $k = 2l$, $l \geq 1$, k tiene al menos $l - 1$ divisores entre $1, 2, \ldots, l$, es decir, todos excepto tal vez uno. De modo que si $l \geq 3$, uno de los números $l - 1$ o $l - 2$ dividen a $k = 2l$. Si este número es $l - 1$, entonces $l - 1$ divide a $2l - 2(l - 1) = 2$, lo que conduce a $l - 1 = 1, 2$; $l = 2, 3$; $k = 4, 6$. Para $l - 2$ un argumento análogo nos da $l - 2 = 1, 2, 4$; $l = 3, 4, 6$; $k = 6, 8, 12$. Si $l = 1, 2$, entonces $k = 2, 4$.
En resumen, los posibles valores de k son $2, 3, 4, 6, 8$ y 12. Ahora probamos para qué primos p el número $n = pk$ satisface $n = p \cdot d(n)$, es decir, $k = d(pk)$. Observamos que todos los números admisibles k tienen divisores primos 2 o 3. Luego, un primo $p \neq 2, 3$ conduce a una solución $n = pk$ si y sólo si $k = d(pk) = 2d(k)$, por las consideraciones iniciales. Entre los posibles valores de k, sólo $k = 8$ y $k = 12$ satisfacen $k = 2d(k)$. Así, obtenemos las soluciones $n = 8p$ y $n = 12p$, donde p es cualquier primo mayor que 3.
Para $p = 2$, la condición es $k = d(2k)$, y esto se verifica sólo si $k = 4$ y $k = 6$ para $k \in \{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$. Obtenemos las soluciones $n = 8$ y $n = 12$. Para $p = 3$, los valores de k que satisfacen $k = d(3k)$ si $k \in \{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ son $k = 3$, $k = 6$ y $k = 8$. Encontramos otras tres soluciones: $n = 9$, $n = 18$ y $n = 24$.
Por lo tanto, todas las soluciones son $8, 9, 12, 18, 24$ y los números $8p$ y $12p$, donde p es un primo mayor que 3.

Soluciones de la Etapa Semifinal Estatal de la 26ª OMM

Como mencionamos en la Presentación, en esta sección publicamos las soluciones del examen de la etapa semifinal estatal del año 2012. Esta etapa consta de un examen con 5 problemas para resolver en un tiempo máximo de 4 horas.

Problema 1. Se tienen 2012 tarjetas numeradas del 1 al 2012, en orden, en una fila. Se van recogiendo algunas cartas en forma alternada como sigue: Se recoge la 1 y se deja la 2 en la fila, se recoge la 3 y se deja la 4 en la fila, etc. Luego se vuelve a comenzar con las cartas que quedan en la fila, así que se recoge la 2 y se deja la 4, se recoge la 6 y se deja la 8 y así sucesivamente. Cuando se llega al final de la fila, se vuelve a empezar. ¿Cuántas cartas quedan en la fila en el momento que se recoge la carta 2012? (Por ejemplo, si sólo hubiera cartas de la 1 a la 6 y se preguntara por cuántas cartas quedan al recoger la carta 6, la respuesta sería 1 pues se habrían recogido, en orden, las cartas con números $1, 3, 5, 2$ y 6 así que sólo quedaría la 4.)

Solución. En la primera vuelta se descartan todas las impares que son $\frac{2012}{2} = 1006$. En la segunda vuelta se descartan las que tienen número de la forma $4k + 2$ que son $\frac{2012}{4} = 503$. En la tercera vuelta se descartan las que tienen número de la forma $8k + 4$ y, como $2012 = 8(251) + 4$, la tarjeta 2012 queda descartada al final de esta vuelta y el número de tarjetas que se descartaron en la vuelta fue $251 + 1$, pues los posibles valores para k en esta vuelta son $0, 1, 2, \ldots, 251$. El total de tarjetas descartadas es $1006+503+252 = 1761$, así que el número de cartas que quedan es $2012-1761 = 251$.

Problema 2. En la mesa hay tres montones de piedras. El montón A tiene 52 piedras, el montón B tiene 40 y el montón C tiene 1. En cada momento Esteban puede hacer uno de los siguientes movimientos:

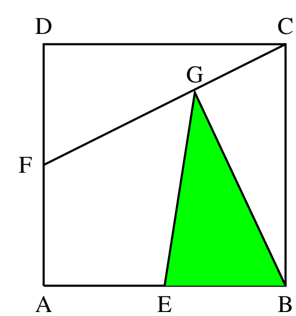
- Quitar 5 piedras de A y ponérselas a B.
- Quitar 4 piedras de B y ponérselas a C.

- Quitar 3 piedras de A y ponérselas a C.

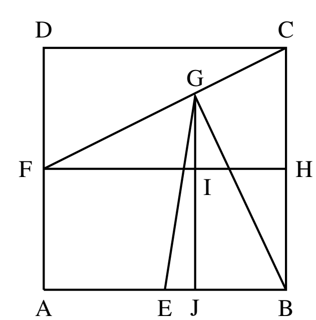
¿Cuántos movimientos necesita hacer Esteban para lograr que en todos los montones haya el mismo número de piedras?

Solución. Como $52 + 40 + 1 = 93$, en cada montón deberá haber al final $\frac{93}{3} = 31$ piedras. De A sólo se quitan piedras, así que es claro que podemos considerar que los movimientos se hacen empezando por quitar todas las piedras necesarias de A. Llamemos b al número de movimientos que se hacen para mandar piedras de A a B, y sea c el número de movimientos que se hacen para mandar piedras de A a C. Entonces, $52-5b-3c$ debe ser 31, o sea que $3c = 21-5b$, y como b y c son enteros no negativos, las únicas posibilidades son $b = 0$ y $c = 7$, o $b = 3$ y $c = 2$. El primer caso es imposible porque B tendría las mismas 40 piedras del principio y, quitándole de 4 en 4 no es posible dejarle 31. En el segundo caso, después de que reciba las 15 piedras de A, B tendrá 55 piedras y, para que al final quede con 31 habrá que quitarle 24, es decir, hacer 6 veces la operación de B a C. El número total de operaciones es $3 + 2 + 6 = 11$.

Problema 3. El cuadrado $ABCD$ tiene lados de longitud $2\,cm$. E y F son los puntos medios de los lados AB y AD, respectivamente, y G es un punto en CF tal que $3 \cdot CG = 2 \cdot GF$. ¿Cuál es el área del triángulo BEG?



Solución. Sean H el punto medio del lado BC, e I y J los pies de las alturas desde G hacia los segmentos FH y AB, respectivamente.



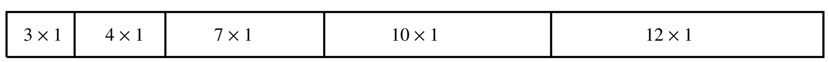
Los triángulos CFH y GFI son semejantes así que la razón entre sus alturas es la misma que entre sus hipotenusas. Luego,

$$\frac{CH}{GI} = \frac{CF}{GF} = \frac{CG + GF}{GF} = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}.$$

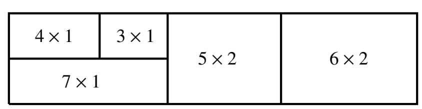
Como $CH = 1\,cm$, tenemos que $GI = \frac{3}{5}\,cm$ y entonces $GJ = \frac{3}{5} + 1 = \frac{8}{5}\,cm$. Por lo tanto, el área buscada es $\frac{1 \cdot \frac{8}{5}}{2} = \frac{4}{5}\,cm^2$.

Problema 4. Un rectángulo se parte en 5 rectángulos de lados enteros de áreas 3, 4, 7, 10 y 12 centímetros cuadrados. Determinar todos los posibles perímetros del rectángulo.

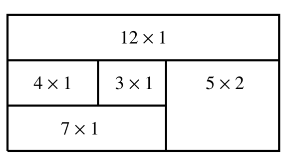
Solución. El rectángulo que buscamos tiene área $3 + 4 + 7 + 10 + 12 = 36$. Entonces, el rectángulo debe ser de 36×1, de 18×2, de 12×3, de 9×4 o de 6×6. Sin embargo, observamos que uno de los rectángulos ya partidos tiene área 7, así que la única posibilidad es que sea de 7×1, de donde vemos que el rectángulo grande no puede ser de 6×6. En la siguiente figura se ilustra que todas las demás medidas mencionadas arriba son posibles y entonces los perímetros posibles son: $2(36 + 1) = 74$, $2(18 + 2) = 40$, $2(12 + 3) = 30$, $2(9 + 4) = 26$.



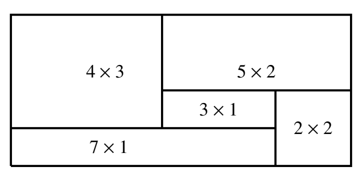
36×1



18×2



12×3



9×4

Problema 5. Determinar todas las parejas de enteros positivos (a, b) tales que $a \leq b$ y $a + b + ab = 134$.

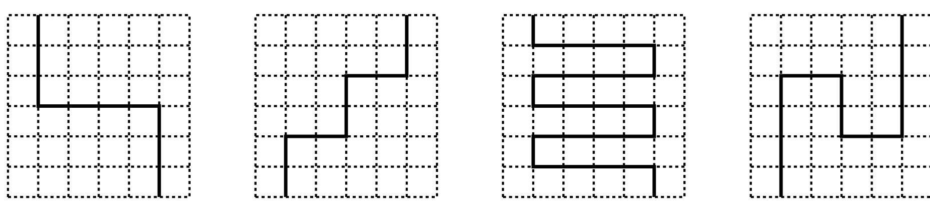
Solución. Como a y b son números positivos, tenemos que $ab < 134$, de donde $a \leq \sqrt{134}$ y, por ser entero, $a \leq 11$. Por otro lado, observamos que a y b no pueden ser ambos impares pues 134 es par; también es imposible que sólo uno de ellos sea par pues el otro sería la diferencia de dos números pares. Hasta aquí tenemos que ambos números son pares y que $a \leq 10$. Además, podemos despejar b y obtenemos $b = \frac{134-a}{1+a}$. Ahora, analicemos las distintas posibilidades para a.

- Si $a = 2$, entonces $b = \frac{132}{3} = 44$.
- Si $a = 4$, entonces $b = \frac{130}{5} = 26$.
- Si $a = 6$, entonces $b = \frac{128}{7}$ que no es entero.
- Si $a = 8$, entonces $b = \frac{126}{9} = 14$.
- Si $a = 10$, entonces $b = \frac{124}{11}$ que no es entero.

Por lo tanto, las posibles soluciones son $(2, 44)$, $(4, 26)$ y $(8, 14)$.

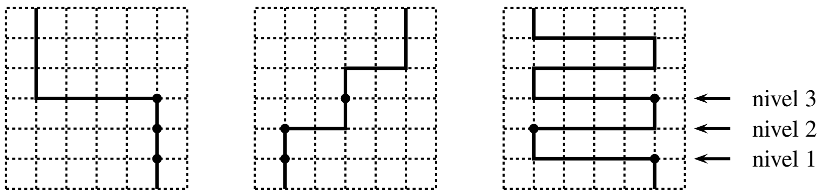
Solución alternativa. Observemos que $(1 + a)(1 + b) = 1 + a + b + ab$, de donde $(1 + a)(1 + b) = 135$. Como $135 = 3^3 \cdot 5$, las distintas posibilidades de factorización de 135 como producto de dos enteros mayores que 1 son: $3 \cdot 45$, $5 \cdot 27$ y $9 \cdot 15$. De aquí obtenemos las parejas (a, b): $(2, 44)$, $(4, 26)$ y $(8, 14)$.

Problema 6. ¿De cuántas maneras es posible cortar un papel cuadriculado de 6×6 empezando en la parte inferior del papel y llegando a la parte superior si sólo se puede cortar sobre las líneas de la cuadrícula? Las dos piezas en que quede partido deben ser iguales y no se puede cortar hacia abajo. (Nota: Dos piezas se consideran iguales si se puede colocar una sobre la otra y ajustan perfectamente.)



corte válido corte válido corte válido corte inválido

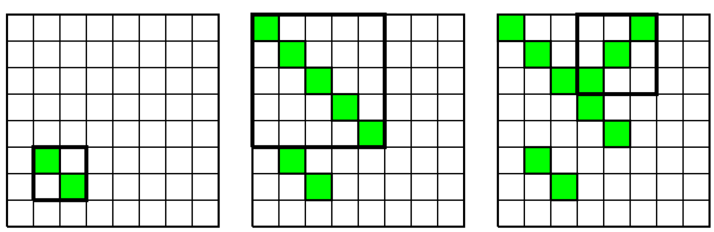
Solución. Cualquier corte debe pasar por el centro del cuadrado y a partir de ahí ya queda determinado para que las dos figuras que queden sean iguales. También podemos observar que el corte queda determinado por la eleccción de los tres puntos interiores del cuadrado a los que se llega verticalmente en cada uno de los niveles horizontales 1, 2 y 3. Como la elección de esos tres puntos se puede hacer de $5^3 = 125$ formas, éste es el número de cortes diferentes. Para entender mejor esto, damos tres ejemplos en donde se ha marcado con $\bullet$ los puntos mencionados.


nivel 3
nivel 2
nivel 1

Etapa Final Estatal de la 26ª OMM

Como mencionamos en la Presentación, en esta sección publicamos el examen de la etapa final estatal del año 2012. Esta etapa consta de dos exámenes con 4 problemas cada uno, para resolver en un tiempo máximo de 4.5 horas.

Problema 1. Dos jugadores A y B juegan alternadamente en una cuadrícula de $n \times n$. Una tirada consiste en escoger un entero $2 \leq m \leq n$ y una subcuadrícula de $m \times m$ contenida en la cuadrícula inicial, y pintar todos los cuadritos de 1×1 que están en una de las dos diagonales de dicha subcuadrícula. Además se tiene la restricción de que no se puede escoger una subcuadrícula que contenga cuadritos pintados previamente (ver el ejemplo que se ilustra abajo en la figura). Pierde el jugador que ya no puede realizar una tirada. Si A es el primero en tirar, ¿quién de A o B puede asegurar que ganará si juega apropiadamente? ¿Cómo debe hacer para asegurar su triunfo?



jugada de A, $m = 2$ jugada de B, $m = 5$ jugada de A, $m = 3$

Problema 2. ¿Existe un triángulo ABC y un punto P en su interior que cumplan que toda recta que pasa por P divide a ABC en dos figuras de igual área?

Problema 3. Se tienen 11 tarjetas numeradas del 1 al 11. Determinar todas las formas de distribuir las tarjetas en 3 montones de tal manera que la suma de las tarjetas de cada montón sea 22 y que en ninguno de los montones haya dos tarjetas una de las cuales tenga un número primo y la otra esté numerada con un número múltiplo de ese primo (por ejemplo, la tarjeta que lleva el 10 no puede estar en el mismo montón que la que lleva el 5).

Problema 4. Encontrar todos los enteros positivos a, b y p, con p número primo que satisfagan la igualdad

$$a^3(b^2 - p) = a^3 + b^2 - 1.$$

Problema 5. Mostrar que el siguiente tablero de 5×5 no se puede completar con los números del 1 al 25 (usando exactamente una vez cada uno) de modo que en cada columna y en cada renglón la suma sea la misma.

7		17		3
5		9		13
15		1		11

Problema 6. Encontrar todas las parejas de enteros positivos $a \leq b$ que satisfagan la siguiente igualdad

$$a!b! = a^2b^2.$$

Problema 7. Sea ABC un triángulo equilátero y sea D cualquier punto en la prolongación del lado BC (con C entre B y D). Sea P la intersección de la bisectriz del ángulo $\angle BAD$ con BC. Sea X la intersección del circuncírculo del triángulo APC con AD. Probar que $AX = AC$.

Problema 8. Sea $\mathcal{P}$ un polígono regular de 20 lados. Determinar cuántos triángulos T con vértices en los vértices de $\mathcal{P}$ cumplen que ningún lado de T es también lado de $\mathcal{P}$.

Problemas y Soluciones de Olimpiadas Internacionales

American Mathematics Competition (AMC 10)

El examen AMC 10 es uno de los primeros exámenes de la Olimpiada de Matemáticas de los Estados Unidos. A diferencia de muchos otros exámenes, éste es un examen de opción múltiple y no se pide justificación alguna en su solución. En años anteriores se ha permitido la participación de un equipo mexicano en este examen y lo presentaban los primeros lugares del concurso nacional durante el entrenamiento nacional de enero. Aunque este año México no participó en dicho examen, presentamos los problemas y las soluciones del examen AMC 10, pues los consideramos adecuados para entrenar.

Problema 1. Un servicio de taxi cuesta \$1.50 más \$0.25 por milla recorrida. ¿Cuánto cuesta un servicio de taxi de 5 millas?

(a) \$2.25 (b) \$2.50 (c) \$2.75 (d) \$3.00 (e) \$3.25

Solución. La respuesta es (c).
Cada milla recorrida implica un costo de \$0.25 y el traslado consta de 5 millas, entonces por concepto de distancia recorrida se genera un costo de $(5)(0.25) = 1.25$ dólares. A lo anterior, hay que añadir \$1.50 por concepto del cargo inicial. Por lo tanto, el costo total del viaje es $1.25 + 1.50 = 2.75$ dólares.

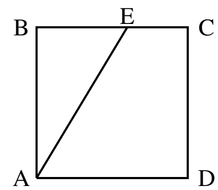
Problema 2. Alicia está haciendo galletas y necesita $2\frac{1}{2}$ tazas de azúcar. Desafortunadamente, en la taza medidora que utiliza únicamente cabe $\frac{1}{4}$ de taza de azúcar. ¿Cuántas veces debe llenar Alicia esa taza medidora para obtener la cantidad correcta de azúcar?

(a) 8 (b) 10 (c) 12 (d) 16 (e) 20

Solución. La respuesta es (b).

Observamos que el número mixto $2\frac{1}{2}$ es equivalente a la fracción impropia $\frac{5}{2}$. Al dividir los $\frac{5}{2}$ de azúcar entre la capacidad de $\frac{1}{4}$ que tiene la taza, obtenemos $\frac{5}{2} \div \frac{1}{4} = \frac{20}{2} = 10$. Por lo tanto, Alicia deberá llenar 10 veces la taza.

Problema 3. Los lados del cuadrado $ABCD$ tienen longitud 10. El punto E está sobre el lado BC, y el área del triángulo ABE es 40. ¿Cuál es la longitud de BE?



(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 8

Solución. La respuesta es (e).
Como $ABCD$ es un cuadrado sabemos que $\angle ABE = 90°$ y entonces el triángulo ABE es rectángulo. Para obtener su área basta multiplicar la base BE por la altura AB, todo esto dividido entre 2. Si el área mide 40 el resultado de multiplicar AB por BE debe ser 80 y como $AB = 10$, concluimos que $BE = \frac{80}{10} = 8$.

Problema 4. Un equipo de softbol jugó diez partidos, obteniendo $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ y 10 carreras. Dicho equipo perdió por una carrera en exactamente cinco partidos. En cada uno de los otros partidos, el equipo obtuvo exactamente el doble de carreras que su oponente. ¿Cuántas carreras en total obtuvieron sus oponentes?

(a) 35 (b) 40 (c) 45 (d) 50 (e) 55

Solución. La respuesta es (c).
Los partidos en que el equipo principal obtuvo un número par de carreras, corresponden a los partidos donde perdieron los equipos oponentes, los que en consecuencia consiguieron $\frac{2}{2} = 1$, $\frac{4}{2} = 2$, $\frac{6}{2} = 3$, $\frac{8}{2} = 4$ y $\frac{10}{2} = 5$ carreras. Por otro lado, los partidos en que el equipo principal obtuvo un número impar de carreras, corresponden a los partidos que ganaron los equipos rivales, los que en estos partidos consiguieron un total de $1 + 1 = 2$, $3 + 1 = 4$, $5 + 1 = 6$, $7 + 1 = 8$ y $9 + 1 = 10$ carreras. Sumando todas estas carreras se obtiene un total de 45 carreras para todos los equipos oponentes.

Problema 5. Tom, Dorothy y Sammy hicieron un viaje de vacaciones y acordaron compartir los gastos en partes iguales. Durante el viaje Tom gastó \$105, Dorothy gastó \$125 y Sammy gastó \$175. Para repartir los gastos igualitariamente, Tom le dió t dólares a Sammy y Dorothy le dió d dólares a Sammy. ¿A qué es igual $t - d$?

(a) \$15 (b) \$20 (c) \$25 (d) \$30 (e) \$35

Solución. La respuesta es (b).
Si sumamos el dinero que gastó cada uno obtenemos $105 + 125 + 175 = 405$ dólares. Si dividimos este total entre las tres personas obtenemos que cada uno debe aportar

$\frac{405}{3} = 135$ dólares. De esta forma Tom debe darle $t = 135 - 105 = 30$ dólares a Sammy; y Dorothy debe darle $d = 135 - 125 = 10$ dólares. De lo anterior se sigue que $t - d = 30 - 10 = 20$ dólares.

Problema 6. Joey y sus cinco hermanos tienen $3, 5, 7, 9, 11$ y 13 años de edad. Una tarde dos de sus hermanos cuyas edades suman 16 años fueron al cine, dos hermanos menores de 10 fueron a jugar beisbol, y Joey y su hermano de 5 años se quedaron en casa. ¿Cuántos años tiene Joey?

(a) 3 (b) 7 (c) 9 (d) 11 (e) 13

Solución. La respuesta es (d).
Como las edades de los que fueron al cine suman 16 y el niño de 5 años se quedó en casa, los que fueron al cine son los hermanos de 3 y 13 años, o son los hermanos de 7 y 9 años. Como dos hermanos menores de 10 años fueron a jugar beisbol, podemos afirmar que los que fueron al cine son los hermanos de 3 y 13 años, y los que fueron a jugar beisbol son los hermanos de 7 y 9 años. De aquí, la única posibilidad es que Joey tenga 11 años.

Problema 7. Un estudiante debe elegir cuatro cursos entre Inglés, Álgebra, Geometría, Historia, Arte y Latín. Entre los elegidos debe estar Inglés y al menos un curso de matemáticas. ¿De cuántas maneras puede hacer la elección?

(a) 6 (b) 8 (c) 9 (d) 12 (e) 16

Solución. La respuesta es (c).
En primer lugar, observamos que en realidad sólo hay que escoger tres cursos, ya que el cuarto forzosamente será Inglés. Comenzamos considerando el caso en que sólo se escoge un curso de matemáticas, entonces para seleccionar el primero de los tres cursos se cuenta con dos opciones: Álgebra o Geometría. Para completar los otros dos cursos tenemos tres combinaciones posibles: Historia-Artes, Historia-Latín o Latín-Artes. En total, tenemos $2 \times 3 = 6$ opciones.
Por último, consideremos el caso en que se escogen dos cursos de matemáticas, en esta situación sólo queda un curso por escoger, teniendo para ello tres opciones posibles. Por lo tanto, teniendo en cuenta los dos casos tenemos un total de $6 + 3 = 9$ opciones posibles.

Problema 8. ¿Cuál es el valor de $\dfrac{2^{2014} + 2^{2012}}{2^{2014} - 2^{2012}}$?

(a) -1 (b) 1 (c) $\frac{5}{3}$ (d) 2013 (e) 2^{4024}

Solución. La respuesta es (c).
Factorizando 2^{2012} en el numerador y el denominador de la fracción se obtiene que

$$\frac{2^{2014} + 2^{2012}}{2^{2014} - 2^{2012}} = \frac{2^{2012}(2^2 + 1)}{2^{2012}(2^2 - 1)} = \frac{2^2 + 1}{2^2 - 1} = \frac{5}{3}.$$

Problema 9. En un juego reciente de baloncesto, Shenille hizo únicamente lanzamientos de tres y de dos puntos. Ella logró encestar en 20 % de sus lanzamientos de tres puntos y en 30 % de sus lanzamientos de dos puntos. Shenille hizo 30 lanzamientos. ¿Cuántos puntos acumuló?

(a) 12 (b) 18 (c) 24 (d) 30 (e) 36

Solución. La respuesta es (b).
Sea n la cantidad de tiros de tres. Como encesta 20 % de estos tiros, entonces $0.2n$ corresponde a la cantidad de tiros de tres encestados y la cantidad de puntos obtenidos por estos tiros es $(3)(0.2n) = 0.6n$. Ahora bien, si m representa la cantidad de tiros de dos, un cálculo similar indica que los puntos obtenidos por estos tiros, de los cuales se logra encestar un 30 %, es $(2)(0.3m) = 0.6m$. Sumando estas cantidades resulta $0.6n + 0.6m = 0.6(n + m)$ y dado que $n + m = 30$, tenemos como resultado final un total de $0.6(30) = 18$ puntos acumulados.

Problema 10. Un ramo de flores contiene rosas rosadas, rosas rojas, claveles rosados y claveles rojos. Un tercio de las flores rosadas son rosas, tres cuartos de las flores rojas son claveles y seis décimos de las flores son rosadas. ¿Qué porcentaje de las flores son claveles?

(a) 15 (b) 30 (c) 40 (d) 60 (e) 70

Solución. La respuesta es (e).
El número de claveles rosados es $\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{10} = \frac{2}{5}$ del número total de flores. El número de claveles rojos es $\frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{6}{10}\right) = \frac{3}{10}$ del número total de flores. Por lo tanto, el porcentaje de claveles es $100\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{10}\right) = 70$.

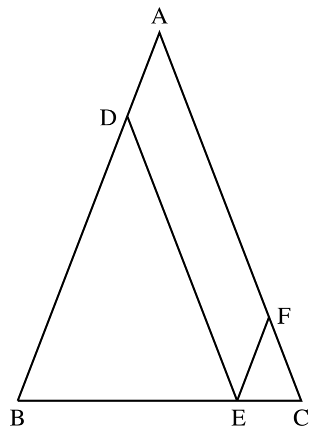
Problema 11. Un consejo estudiantil debe seleccionar entre sus miembros a un comité de bienvenida de dos personas y a un comité de planeación de tres personas. Hay exactamente 10 maneras de seleccionar el equipo de dos personas para el comité de bienvenida. Es posible que haya estudiantes que estén en ambos comités. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar el comité de planeación de tres personas?

(a) 10 (b) 12 (c) 15 (d) 18 (e) 25

Solución. La respuesta es (a).
Es claro que el número de miembros del consejo determina el número de posibles parejas que se pueden formar y que el consejo debe tener más de dos miembros. Es fácil ver que si el consejo estuviera formado por 3 miembros, entonces sólo se podrían formar 3 parejas posibles: $(1, 2)$, $(1, 3)$ y $(2, 3)$. Si estuviera formado por 4 miembros entonces podríamos formar 6 parejas: $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$ y $(3, 4)$. Si el consejo se forma con cinco estudiantes, entonces se pueden generar 10 parejas distintas: $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$ y $(4, 5)$. Por lo tanto, el consejo está formado por 5 integrantes.
Ahora bien, elegir una terna de integrantes para el comité de planeación es equivalente

a elegir la pareja que no estará en el comité. Como hay 10 maneras distintas de seleccionar a una pareja, entonces hay 10 maneras de selccionar a la terna que integrará el comité.

Problema 12. En un triángulo ABC, $AB = AC = 28$ y $BC = 20$. Los puntos D, E y F yacen en los lados AB, BC y AC, respectivamente, de tal manera que DE y EF son paralelos a AC y a AB, respectivamente. ¿Cuál es el perímetro del paralelogramo $ADEF$?



(a) 48 (b) 52 (c) 56 (d) 60 (e) 72

Solución. La respuesta es (c).
Como los segmentos DE y FE son paralelos a AC y AB respectivamente, entonces por el criterio de semejanza AAA, al tener ángulos correspondientes iguales, los triángulos, ABC, DBE y FEC, son semejantes. Como el triángulo ABC es isósceles, entonces los otros dos también lo son, en particular lo es el triángulo FEC, donde $FC = FE$.
Por lo tanto, $AB = AC = AF + FC = AF + FE = 28$ y como $ADEF$ es un paralelogramo, su perímetro es igual al doble de la suma de dos lados no paralelos, es decir $P = 2(AF + FE) = 2 \times 28 = 56$.

Problema 13. ¿Cuántos números de tres dígitos que no son divisibles por 5, tienen dígitos que suman menos que 20 y tienen el primer dígito igual al tercer dígito?

(a) 52 (b) 60 (c) 66 (d) 68 (e) 70

Solución. La respuesta es (b).
Los números de tres dígitos tienen la forma aba, ya que el tercer dígito es igual al primero. Si este número de tres dígitos no es divisible por 5, entonces las opciones para a son: $1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9$. Si a toma alguno de los cuatro primeros valores (es decir 1, 2, 3 o 4), entonces $2a < 9$ y b puede tomar cualquier valor entero entre 0 y 9. Esto da $4 \times 10 = 40$ posibilidades para esta primera situación. Si a toma el valor 6, tenemos que $2a = 12$ y como $2a + b < 20$, entonces b sólo puede tomar los valores enteros del 0 al 7; si a toma el valor 7, entonces b sólo podrá tomar valores del 0 al 5; si a es 8, b

podrá estar entre 0 y 3; y finalmente si $a = 9$, b podrá ser 0 o 1. Todo esto nos da otras $8 + 6 + 4 + 2 = 20$ posibilidades que, sumadas a las 40 anteriores, dan un total de 60 posibilidades.

Problema 14. Se quita un cubo sólido con arista de longitud 1 de cada esquina de un cubo sólido con arista de longitud 3. ¿Cuántas aristas tiene el sólido resultante?

(a) 36 (b) 60 (c) 72 (d) 84 (e) 108

Solución. La respuesta es (d).
Al quitar un cubo en cada esquina del cubo original permanecen todas las aristas originales, mismas que son 12. Es fácil ver que al quitar un cubo en una esquina surgen 9 aristas nuevas y considerando que en total hay 8 esquinas, esto da un total de $8 \cdot 9 = 72$ aristas nuevas. Por lo tanto, el nuevo sólido tiene $72 + 12 = 84$ aristas.

Problema 15. Dos lados de un triángulo tienen longitudes 10 y 15. La longitud de la altura al tercer lado es la media aritmética de las longitudes de las alturas a los dos lados dados. ¿Cuál es la longitud del tercer lado?

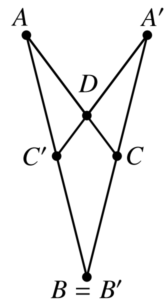
(a) 6 (b) 8 (c) 9 (d) 12 (e) 18

Solución. La respuesta es (d).
Si llamamos h_1 a la altura trazada sobre el lado que mide 15 y h_2 a la altura correspondiente sobre el lado que mide 10, entonces usando la fórmula para calcular el área de un triángulo tenemos que $S = \frac{15h_1}{2} = \frac{10h_2}{2}$, de donde se sigue que $h_1 = \frac{2}{3}h_2$.
Sean x la medida del tercer lado y h su altura correspondiente. Como h es el promedio de las otras dos alturas, tenemos que $h = \frac{h_1+h_2}{2}$. Calculando nuevamente el área, pero a partir del tercer lado, tenemos que $S = \frac{x}{2}h = \frac{x}{2}\left(\frac{h_1+h_2}{2}\right) = \frac{x(h_1+h_2)}{4}$. Igualando con el área calculada a partir del lado que mide 10, tenemos que $\frac{x(h_1+h_2)}{4} = \frac{10h_2}{2}$, de donde se sigue que $x(h_1 + h_2) = 20h_2$. Por lo tanto, $x = \frac{20h_2}{h_1+h_2}$, pero como $h_1 = \frac{2}{3}h_2$, entonces $x = \frac{20h_2}{\frac{5}{3}h_2} = \frac{60}{5} = 12$.

Problema 16. Se refleja un triángulo con vértices $(6, 5)$, $(8, -3)$ y $(9, 1)$ alrededor de la recta $x = 8$ para formar un segundo triángulo. ¿Cuál es el área de la figura formada por los dos triángulos?

(a) 9 (b) $\frac{28}{3}$ (c) 10 (d) $\frac{31}{3}$ (e) $\frac{32}{3}$

Solución. La respuesta es (e).
Sean $A = (6, 5)$, $B = (8, -3)$ y $C = (9, 1)$; sean $A' = (10, 5)$, $B' = B(8, -3)$ y $C' = (7, 1)$ sus imágenes correspondientes bajo la reflexión; y sea D el punto de intersección de AC y $A'C'$.



Observemos que los triángulos ABA' y ADA' son isósceles y que el área buscada es igual al área del triángulo ABA' menos el área del triángulo ADA' (pues C' está en el segmento AB y C está en el segmento $A'B$). El área del triángulo ABA' es fácil de calcular, pues sus coordenadas son enteras, entonces sabemos que su base mide 4 y su altura mide 8, por lo tanto su área mide $\frac{(8)(4)}{2} = 16$.
Ahora calcularemos el área del triángulo ADA'. Sean E el punto medio del segmento CC' y F el punto de intersección de la recta CC' con su perpendicular trazada desde A. Entonces los triángulos rectángulos DEC y AFC son semejantes, por lo tanto $\frac{DE}{EC} = \frac{AF}{FC}$, de donde se sigue que $DE = \frac{AF \cdot EC}{FC} = \frac{(4)(1)}{(3)} = \frac{4}{3}$. Ahora, la altura h, correspondiente al lado AA', desde D, es igual a la altura desde E menos la longitud de DE, esto es $h = 4 - DE = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$. Por lo tanto, el área del triángulo ADA' mide $\frac{1}{2}(4)\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{16}{3}$. Por lo tanto, el área buscada es igual a $16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$.

Problema 17. Daphne recibe periódicamente la visita de sus 3 mejores amigas: Alice, Bety y Claire. Alice la visita cada tercer día, Bety cada cuarto día y Claire cada quinto día. Las tres visitaron a Daphne ayer. ¿En cuántos días del siguiente periodo de 365 días visitarán a Daphne exactamente dos de sus amigas?

(a) 48 (b) 54 (c) 60 (d) 66 (e) 72

Solución. La respuesta es (b).
Dado que las tres visitaron a Daphne ayer, entonces los próximos días de visita de cada una serán los múltiplos de 3, 4 y 5 respectivamente. Alice y Bety la visitarán cada día múltiplo de $3 \times 4 = 12$, mientras que Alice y Claire la visitarán cada día múltiplo de $3 \times 5 = 15$ y finalmente Bety y Claire la visitarán cada día múltiplo de $4 \times 5 = 20$. Ahora bien, como $\frac{365}{12} = 30 + \frac{5}{12}$, entonces hay 30 múltiplos de 12 que son menores que 365. De manera similar se concluye que hay 24 múltiplos de 15 menores que 365 y hay 18 múltiplos de 20 menores que 365. Sin embargo, en estos días se están contando repetidamente las ocasiones en que se presentan las tres simultáneamente, lo cual hay que excluir. De cada cinco múltiplos consecutivos de 12 uno es múltiplo de 5, por lo que sólo se toman en cuenta 4, esto es, $30 \times \frac{4}{5} = 24$, análogamente, de cada cuatro múltiplos consecutivos sólo hay que considerar tres, lo cual da $24 \times \frac{3}{4} = 18$. Por último de cada 3 múltiplos consecutivos de 20 hay que considerar sólo dos, por lo que resulta $18 \times \frac{2}{3} = 12$. Sumando estos resultados se consigue la solución $24 + 18 + 12 = 54$.

Problema 18. Consideremos los puntos $A = (0, 0)$, $B = (1, 2)$, $C = (3, 3)$ y $D = (4, 0)$.

Una recta que pasa por A corta al cuadrilátero $ABCD$ en pedazos de igual área. Esta recta intersecta a CD en el punto $(\frac{p}{q}, \frac{r}{s})$, donde estas fracciones están simplificadas. ¿Cuál es el valor de $p + q + r + s$?

(a) 54 (b) 58 (c) 62 (d) 70 (e) 75

Solución. La respuesta es (b).
Sobre una cuadrícula, es fácil ver que el cuadrilátero $ABCD$, se descompone en: un cuadrado de 2×2, dos triángulos rectángulos con catetos de medidas 1 y 2; y un tercer triángulo rectángulo con catetos de medidas 1 y 3. Por lo tanto, el área de $ABCD$ es $\frac{15}{2}$.
La recta que pasa por A, corta al lado CD en el punto E, dividiendo al cuadrilátero $ABCD$, en el triángulo ADE y el cuadrilátero $ABCE$; ambos polígonos con áreas iguales a la mitad de $\frac{15}{2}$. Ahora, como $AD = 4$, y el área del triángulo ADE mide $\frac{15}{4}$, concluimos que la ordenada de $E = (a, b)$ es $b = \frac{15}{8}$.
Ahora, calcularemos la abscisa a del punto E. Sean $F = (a, 0)$ y $G = (3, 0)$, entonces, como los triángulos rectángulos FDE y GDC son semejantes, tenemos que $\frac{FD}{FE} = \frac{GD}{GC}$; de donde $FD = \frac{1}{3} \cdot b = \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{8} = \frac{5}{8}$. Por lo tanto, $a = 4 - \frac{5}{8} = \frac{27}{8}$ y $E = (a, b) = \left(\frac{27}{8}, \frac{15}{8}\right)$. Finalmente, como estas fracciones ya están simplificadas, tenemos que $p + q + r + s = 27 + 8 + 15 + 8 = 58$.

Problema 19. En base 10 el número 2013 termina en el dígito 3. Por otro lado, en base 9, el mismo número se escribe como $(2676)_9$ y termina en el dígito 6. ¿Para cuántos enteros positivos b sucede que la representación en base b de 2013 termina en el dígito 3?

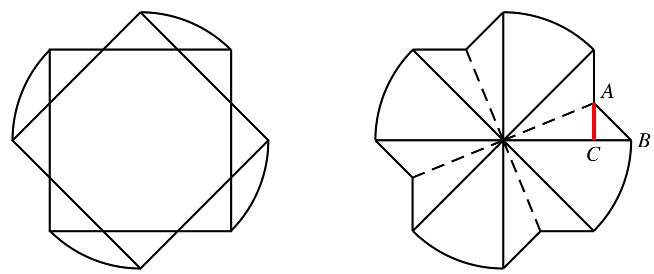
(a) 6 (b) 9 (c) 13 (d) 16 (e) 18

Solución. La respuesta es (c).
Estamos buscando bases b tales que $2013 \equiv 3 \pmod{b}$, es decir, $2010 \equiv 0 \pmod{b}$. A partir de la descomposición en primos de $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$, concluimos que 2010 tiene un total de 16 divisores positivos. Considerando sólo a los que son mayores que 3, tenemos 13 números, a saber: 5, 6, 10, 15, 30, 67, 134, 201, 335, 402, 670, 1005 y 2010.

Problema 20. Se rota un cuadrado unitario por un ángulo de 45° alrededor de su centro. ¿Cuál es el área de la región barrida por el interior del cuadrado?

(a) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$ (c) $2 - \sqrt{2} + \frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4}$ (e) $1 + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi}{8}$

Solución. La respuesta es (c).
Veamos la figura que se forma al rotar el cuadrado.



Usando el teorema de Pitágoras obtenemos que la mitad de la diagonal del cuadrado de lado 1 mide $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Por lo tanto, la figura se compone de 4 sectores, cuyas áreas suman tanto como medio círculo de radio r, más 8 veces el área de un triángulo.
Ahora, observamos que cada uno de estos 8 triángulos congruentes tiene base de longitud igual a r. Luego, para determinar su altura, nos fijamos en el triángulo rectángulo e isósceles ABC, y vemos que la altura AC mide tanto como BC, es decir, la diferencia de r (la mitad de la diagonal) menos la mitad del lado del cuadrado unitario, es decir, $h = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$. Por lo tanto el área total de la figura es:

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 8\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} + 2 - \sqrt{2}.$$

Problema 21. Un grupo de 12 piratas acuerda repartir un cofre de monedas de oro entre ellos como sigue. El pirata k-ésimo, en su turno, toma $\frac{k}{12}$ de las monedas que permanezcan en el cofre. El número de monedas que están en el cofre es el más pequeño para el cual este arreglo permite que cada pirata reciba un número entero de monedas. ¿Cuántas monedas recibe el pirata 12-ésimo?

(a) 720 (b) 1296 (c) 1728 (d) 1925 (e) 3850

Solución. La respuesta es (d).
La respuesta correcta es (d). Sea x el número de monedas. Dado que después de que el k-ésimo pirata toma su parte, queda un total de $\frac{12-k}{12}$ monedas, sabemos que

$$x \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{12} \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{12}$$

debe ser un número entero. Simplificando obtenemos,

$$\begin{aligned}\frac{x \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{12^{11}} &= \frac{x \cdot 12^2(72 \cdot 2) \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}{12^{11}} \\ &= \frac{x \cdot 144 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11}{12^9} = \frac{x \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11}{12^7}.\end{aligned}$$

De donde, por la minimalidad de la solución, se sigue que $x = 12^7$ y el último pirata recibe $25(7)(11) = 1925$ monedas.

Problema 22. Seis esferas de radio 1 están ubicadas de tal manera que sus centros están en los vértices de un hexágono regular de lado de longitud 2. Las seis esferas son tangentes internamente a una esfera más grande cuyo centro está en el centro del hexágono. Una octava esfera es tangente exteriormente a las seis esferas más pequeñas y tangente interiormente a la esfera más grande. ¿Cuál es el radio de la octava esfera?

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) $\frac{5}{3}$ (d) $\sqrt{3}$ (e) 2

Solución. La respuesta es (b).
Por la configuración de las seis esferas de radio 1, en el centro del hexágono queda un espacio donde cabe exactamente otra esfera tangente a las seis primeras y también de radio 1. Sin embargo, hay una séptima esfera $\mathcal{E}_7$ tangente de manera interna a las seis anteriores, y de centro el mismo que el del hexágono, por lo que su radio es $r_7 = 3$ (ya que en su diámetro caben dos de las seis esferas de radio 1 y el hueco que había quedado entre ellas). La octava esfera, $\mathcal{E}_8$, de la cual se busca el radio, r_8, es tangente de forma externa a las seis primeras y tangente de forma interna a la esfera $\mathcal{E}_7$. Por esta razón su centro está en la perpendicular al hexágono que pasa por el centro del hexágono. Si llamamos α a la altura a la que se encuentra el centro de la esfera $\mathcal{E}_8$, podemos establecer por medio del teorema de Pitágoras que su radio es $\sqrt{\alpha^2 + 2^2} - 1$, ésta es la distancia del centro de la esfera $\mathcal{E}_8$ al centro de una esfera de radio 1, disminuida en 1, y debe ser igual a $r_7 - \alpha$, es decir igual a $3 - \alpha$, por lo que tenemos la ecuación

$$\sqrt{\alpha^2 + 2^2} - 1 = 3 - \alpha$$

Esta ecuación tiene como solución $\alpha = \frac{3}{2}$. Por lo tanto, el radio de la octava esfera mide $3 - \alpha = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$.

Problema 23. En un triángulo ABC, $AB = 86$ y $AC = 97$. Un círculo con centro A y radio AB intersecta a BC en los puntos B y X. Además BX y CX tienen longitudes enteras. ¿Cuánto mide BC?

(a) 11 (b) 28 (c) 33 (d) 61 (e) 72

Solución. La respuesta es (d).
Sea l la longitud de BC y $2x$ la del segmento XB. Como $AB = AX = 86$, tenemos que el triángulo BAX es isósceles. Luego, si trazamos la altura desde A, el triángulo ABC queda dividido en dos triángulos rectángulos con hipotenusas de medidas 86 y 97. Si representamos con h a la medida de dicha altura y aplicamos el teorema de Pitágoras en ambos triángulos rectángulos obtenemos $h^2 = 86^2 - x^2$ y $h^2 = 97^2 - (l - x)^2$; de donde se sigue que $97^2 - 86^2 = (l - x)^2 - x^2$ y simplificando obtenemos que $2013 = l^2 - 2xl + x^2 - x^2 = l(l - 2x)$, donde $2x$ y l son enteros positivos.
Ahora, consideremos la descomposición en primos de $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$. Por la desigualdad del triángulo sabemos que $l < 183$, por lo que $l \in \{1, 3, 11, 33, 61\}$. Por otro lado, tenemos que $2013 = l(l - 2x) < l^2$ de donde $l \geq \sqrt{2013} > 33$. Por lo tanto, la

única posibilidad es $l = 61$, en cuyo caso $x = 14$. Concluimos que la medida de BC es $l = 61$.

Problema 24. La Escuela Central High está compitiendo contra la Escuela Northern High en un torneo de backgammon. Cada escuela tiene tres competidores y las reglas del torneo requieren que cada competidor juegue dos partidos contra cada uno de los competidores de la otra escuela. El torneo tiene lugar en seis rondas, jugándose tres partidos de manera simultánea en cada ronda. ¿De cuántas maneras distintas se puede programar el torneo?

(a) 540 (b) 600 (c) 720 (d) 810 (e) 900

Solución. La respuesta es (e).
Usemos a, b, c para representar a los miembros del primer equipo y x, y, z para los del segundo. Si consideramos los seis juegos de a, a saber, ax, ax, ay, ay, az y az y debido a que hay 3 partidos duplicados, tenemos que hay un total de $\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = 90$ formas posibles de acomodarlos. Ahora consideramos a b y c. Sin pérdida de generalidad supondremos que los juegos de a se dieron en la secuencia ax, ax, ay, ay, az, az y al final multiplicaremos el resutado por 90. Si en la primera ronda b juega con y, y c con z, tenemos dos casos

- Caso 1.- b vuelve a jugar con y en la segunda ronda y c con z. En este caso los demás partidos quedan totalmente determinados, pues c debe jugar con x en las rondas 3 y 4 (dado que ya ha jugado con z dos veces). Lo mismo sucede con b y y en las rondas 5 y 6. Por lo tanto, en este caso sólo hay una posibilidad.

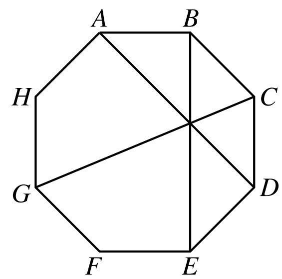
- Caso 2.- b juega con z en la segunda ronda y c con y. En este caso, b puede jugar con z en cualquiera de las rondas 3 o 4; y con y en las rondas 5 o 6, en total $2 \times 2 = 4$ posibilidades.

Entonces, si b juega con y en la primera ronda, hay $4 + 1 = 5$ posibilidades. Multiplicando por 2 debido al caso donde b juega con z en la primera ronda, obtenemos 10 posibilidades. Por lo tanto, en total hay $90 \times 10 = 900$ formas posibles de acomodar el torneo.

Problema 25. Se dibujan todas las diagonales en un octágono regular, 20 en total. ¿En cuántos puntos distintos en el interior del octágono (no en el borde) se intersectan dos o más diagonales?

(a) 49 (b) 65 (c) 70 (d) 96 (e) 128

Solución. La respuesta es (a).
Sea x el número de intersecciones. Dado que cada 4 puntos forman un cuadrilátero con diagonales que se intersectan, tenemos que $x \leq \binom{8}{4} = 70$. Ahora, considerando las 4 diagonales que se intersectan en el centro, debemos descontar $\binom{4}{2} - 1 = 5$ puntos de nuestra cuenta, $70 - 5 = 65$.



Considerando que las 3 diagonales AD, CG y DE se intersectan en un solo punto y dada la simetría de la figura, contamos un total de 8 puntos donde concurren 3 diagonales. En consecuencia, debemos descontar $2\times 8 = 16$ puntos, obteniendo $65-16 = 49$. Dado que en el resto de los puntos de intersección sólo concurren 2 diagonales, tenemos que el resultado final es 49.

XXV Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico

Desde 1990, los ganadores del Concurso Nacional participan anualmente en la Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico, APMO, por sus siglas en inglés. A diferencia de otros exámenes de olimpiadas, éste consiste en un único examen con 5 problemas para resolver en un máximo de 4 horas. Además cada problema vale 7 puntos.

En el mes de marzo, se aplicó el examen de la XXV Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico a los alumnos que en ese momento formaban parte de la preselección nacional. Dicho examen se aplicó y calificó en México y los 10 mejores exámenes se enviaron a Kazajistán para ser evaluados por el comité organizador.

Este año México obtuvo una medalla de oro, dos medallas de plata, cuatro medallas de bronce y tres menciones honoríficas. Con 194 puntos, México consigue el lugar número 14 de 34 países participantes, además obtiene el máximo número de medallas que dicho concurso otorga a cada país por año. Los nombres de los alumnos que obtuvieron tales preseas se enlistas a continuación:

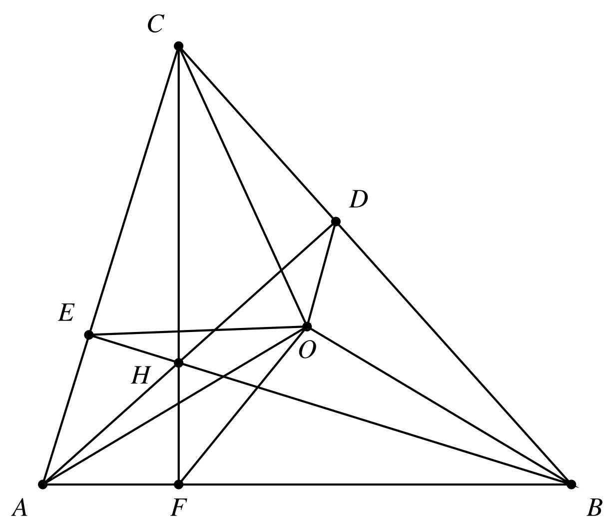
1. Diego Alonso Roque Montoya (oro).
2. Kevin William Beuchot Castellanos (plata).
3. Enrique Chiu Han (plata).
4. Juan Carlos Ortiz Rhoton (bronce).
5. Luis Xavier Ramos Tormo (bronce).
6. Adán Medrano Martín del Campo (bronce).
7. Olga Medrano Martín del Campo (bronce).

8. Axel Omer Gómez Cásarez (mención honorífica).
9. Demian Espinosa Ruiz (mención honorífica).
10. María Cecilia Rojas Cuadra (mención honorífica).

A continuación presentamos los problemas y las soluciones de la XXV Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico. Las soluciones que presentamos corresponden a las dadas por los alumnos mexicanos que fueron seleccionados para participar en este certamen, y no necesariamente son de los 10 mejores exámenes que fueron enviados al comité organizador para ser evaluados.

Problema 1. Sea ABC un triángulo acutángulo con alturas AD, BE y CF, y sea O el centro del circuncírculo de ABC. Muestre que los segmentos OA, OF, OB, OD, OC, OE dividen al triángulo ABC en tres pares de triángulos, en donde cada par de triángulos tienen la misma área.

Solución de Ramón Iván García Álvarez. Sea H el ortocentro del triángulo ABC.



Sea $\alpha = \angle BAO$. Como O y H son conjugados isogonales[7] tenemos que $\angle DAC = \alpha$. Como el triángulo ADC es un triángulo rectángulo, tenemos que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{CD}{AC}$ y el área del triángulo AFO es igual a

$$\frac{AO \cdot AF \cdot \operatorname{sen}(\angle OAF)}{2} = \frac{AO \cdot AF \cdot CD}{2AC} = \frac{AF \cdot CD \cdot R}{2AC},$$

donde $R = OA$ es el radio de la circunferencia circunscrita. De la misma manera, si $\theta = \angle OCA$ tendremos que $\angle BCF = \theta$ y el área del triángulo DCO es igual a

$$\frac{AF \cdot CD \cdot R}{2AC}.$$

[7] Ver en el apéndice el teorema 26.

Luego, los triángulos AFO y DCO tienen la misma área. Análogamente se demuestra que los triángulos EAO y BDO tienen la misma área; así como los triángulos BFO y CEO.

Problema 2. Determine todos los enteros positivos n que cumplen que $\dfrac{n^2+1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor^2 + 2}$ es un entero. (*Aquí* $\lfloor r \rfloor$ *denota el mayor entero menor o igual a* r.)

Solución de Adán Medrano Martín del Campo. Para cada entero positivo n, existe un único entero no negativo a tal que $a^2 \leq n < (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$.
Tomemos dicha a y sea k el entero no negativo tal que $n = a^2 + k$ (k cumple que $0 \leq k \leq 2a$). Luego

$$x = \frac{n^2+1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor^2 + 2} = \frac{n^2+1}{a^2+2}.$$

Para que x sea entero, necesitamos que a^2+2 divida a $n^2+1 = (a^2+k)^2+1 = a^4 + 2ka^2 + k^2 + 1$. Como a^2+2 divide a $(a^2+2)^2 = a^4 + 4a^2 + 4$, basta que a^2+2 divida a $(a^4 + 2ka^2 + k^2 + 1) - (a^4 + 4a^2 + 4) = a^2(2k-4) + k^2 - 3$. De la misma manera, como a^2+2 divide a $(a^2+2)(2k-4) = 2ka^2 - 4a^2 + 4k - 8$, basta que a^2+2 divida a $(a^2(2k-4) + k^2 - 3) - (2ka^2 - 4a^2 + 4k - 8) = k^2 - 4k + 5$. Ahora, notamos que

$$k^2 - 4k + 5 = (k-2)^2 + 1 \leq (2a-2)^2 + 1 = 4a^2 - 8a + 5 < 4a^2 + 8 = 4(a^2+2).$$

Por lo tanto, si a^2+2 divide a $k^2 - 4k + 5$ (con $0 \leq k \leq 2a$), es necesario que $1 \leq \frac{k^2-4k+5}{a^2+2} \leq 3$. Veamos cada caso.

1. $\frac{k^2-4k+5}{a^2+2} = 1$. Tenemos que $k^2 - 4k + 5 = a^2 + 2$, lo cual es equivalente a $(k-2)^2 - a^2 = 1$, lo cual es imposible, pues no existen dos enteros positivos consecutivos que sean cuadrados.

2. $\frac{k^2-4k+5}{a^2+2} = 2$. Esta ecuación es equivalente a $2(a^2+2) = (k-2)^2 + 1$. Como $2(a^2+2)$ es par, tenemos que $(k-2)^2 + 1$ también lo es y como los cuadrados dejan residuo 0 o 1 al ser divididos entre 4, notamos que 4 no divide a $(k-2)^2 + 1$, de donde tampoco divide a $2(a^2+2)$ y a es impar. Como $(k-2)^2 + 1$ es par, k también es impar. Sustituimos $a = 2b+1$, $k = 2m+1$ (tenemos que $2m+1 = k \leq 2a = 4b+2$, o $m \leq 2b$). Llegamos a

   $$2b^2 + 2b + 1 = m^2 - m.$$

   Esta última ecuación no tiene soluciones enteras, pues $2b^2 + 2b + 1$ siempre es impar y $m^2 - m = m(m-1)$ siempre es par. Luego, no hay soluciones en este caso.

3. $\frac{k^2-4k+5}{a^2+2} = 3$. Esta ecuación es equivalente a $3(a^2+2) = (k-2)^2 + 1$. Como los cuadrados dejan residuo 0 o 1 al dividirse entre 3, $(k-2)^2 + 1$ deja residuo 1 o 2, por lo que no hay soluciones.

Concluimos que ningún entero n cumple.

Problema 3. Para $2k$ números reales $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k$ se define la sucesión de números X_n por

$$X_n = \sum_{i=1}^{k} \lfloor a_i n + b_i \rfloor, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Si la sucesión X_n forma una progresión aritmética, muestre que la suma $\sum_{i=1}^{k} a_i$ debe ser un entero.
Aquí $\lfloor r \rfloor$ denota el mayor entero menor o igual a r.

Solución de Luis Xavier Ramos Tormo. Recordamos que $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ es la parte fraccionaria de x y cumple que $0 \leq \{x\} < 1$. Para cada entero positivo n, sea

$$A_n = \sum_{i=1}^{k} (a_i n + b_i).$$

Tenemos que $A_{n+1} - A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ para todo entero positivo n. Luego, $A_{n+1} - A_1 = n(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$.
Sea $t = X_2 - X_1$ la diferencia de la progresión aritmética. Luego, $X_{n+1} - X_1 = nt$.
Ahora,

$$A_n - X_n = \sum_{i=1}^{k} (a_i n + b_i) - \lfloor a_i n + b_i \rfloor = \sum_{i=1}^{k} \{a_i n + b_i\}.$$

En particular, $A_1 - X_1 = \sum_{i=1}^{k} \{a_i + b_i\}$.
Calculemos $(A_{n+1} - A_1) - (X_{n+1} - X_1)$ de dos maneras diferentes. Por un lado,

$$(A_{n+1} - A_1) - (X_{n+1} - X_1) = n(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) - nt = n(a_1 + a_2 + \cdots + a_k - t),$$

y por otro lado,

$$(A_{n+1} - A_1) - (X_{n+1} - X_1) = (A_{n+1} - X_{n+1}) - (A_1 - X_1) = \sum_{i=1}^{k} (\{a_i(n+1) + b_i\} + \{a_i + b_i\}).$$

Como $0 \leq \{x\} < 1$ tenemos que,

$$0 \leq \sum_{i=1}^{k} (\{a_i(n+1) + b_i\} + \{a_i + b_i\}) < 2k.$$

Por lo tanto, $0 \leq n(a_1 + a_2 + \cdots + a_k - t) < 2k$ para todo entero positivo n.
Si $a_1 + a_2 + \cdots + a_k - t > 0$, podemos encontrar un entero positivo n tal que $n(a_1 + a_2 + \cdots + a_k - t) \geq 2k$, lo cual no es posible. De manera similar, si $a_1 + a_2 + \cdots + a_k - t < 0$, tomando $n = 1$ llegamos a que $n(a_1 + a_2 + \cdots + a_k - t) < 0$, lo cual tampoco es posible.
Luego, $a_1 + a_2 + \cdots + a_k - t = 0$ de donde $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = t$, el cual es un entero por ser la diferencia común de una progresión aritmética de enteros.

Problema 4. Sean a y b enteros positivos, y sean A y B conjuntos finitos de enteros que satisfacen:

1. A y B son ajenos.
2. Si un entero i pertenece a A o a B, entonces o bien $i+a$ pertenece a A o bien $i-b$ pertenece a B.

Muestre que $a\,|A| = b\,|B|$.
Aquí $|X|$ denota el número de elementos del conjunto X.

Solución de Kevin William Beuchot Castellanos. Sea x un elemento de A. Consideramos un camino que comienza en x en donde el siguiente número será $x + a$ (si $x + a \in A$) o $x - b$ (si $x - b \in B$). Como solo una de esas dos condiciones sucede, mi camino está determinado de una única manera. Demostremos que eventualmente el camino vuelve a x.
Si esto no sucede, pueden pasar dos cosas: o el camino terminó en un punto z o se formó un ciclo donde x no está incluido. El primer caso es imposible, puesto que necesariamente $z + a \in A$ o $z - b \in B$ para todo $z \in A \cup B$.
El otro caso es el del ciclo que no contiene a x. Digamos que el ciclo comienza en un número y. Cuando el camino llegó por primera vez a y tuvo que venir de un z tal que $z + a = y$ o $z - b = y$. Como se formará un ciclo, tenemos que hay otro número w en el camino (diferente de z) tal que de z vamos a y. Así, tiene que suceder que $w + a = z$ o $w - b = z$. Como $w + a \neq z + a$ y $w - b \neq z - b$, necesariamente tiene que suceder que $w + a = y = z - b$ o que $w - a = y = z + b$. Si $w + a = y = z - b$, como w está en $A \cup B$, tenemos que $z \in A$ (pues $z = w + a$) y como $z \in A \cup B$, tenemos que $y \in B$ (pues $y = w - b$). Esto es una contradicción pues A y B no tienen elementos en común. Análogamente se llega a una contradicción si $w - a = y = z + b$. Concluimos que el camino debe volver a x.
Digamos que en este camino tuvimos m_1 números en A y n_1 números en B. Como volvimos a x tenemos que $x = x + m_1 a - n_1 b$ o $m_1 a - n_1 b = 0$. Si queda algún número en A volvemos a hacer un camino y llegamos a que $m_2 a - n_2 b = 0$ (donde m_2 es el número de elementos de A en este nuevo camino y n_2 el de B). Como hay una cantidad finita de elementos en A, en algún momento terminamos y llegamos a que

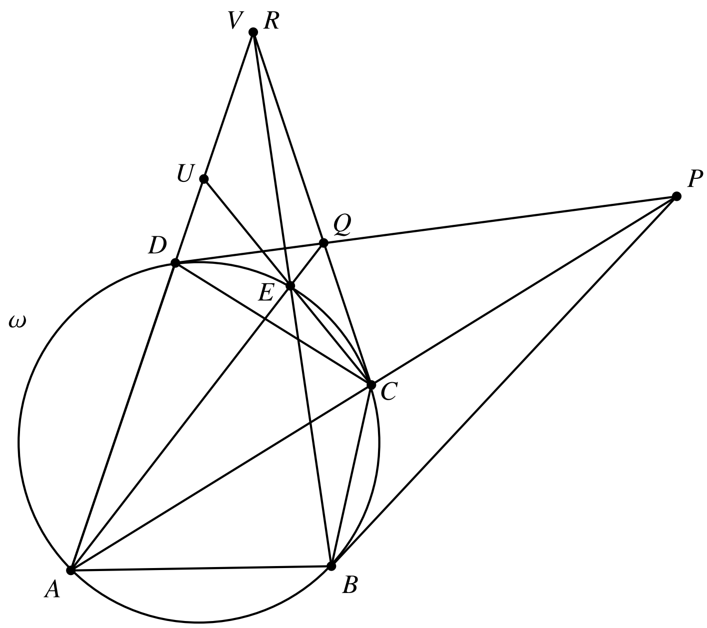
$$(m_1 + m_2 + \cdots + m_k)a - (n_1 + n_2 + \cdots + n_k)b = 0.$$

Observamos que el número de elementos de A es exactamente $m_1 + m_2 + \cdots + m_k$. Si $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ no fuera el número de elementos de B, habría un y de B que no está en los caminos. Esto no es posible, ya que cada número tiene su sucesor en uno de los caminos y cada número tiene a lo más un antecesor y esto solo puede suceder si todos los números están en ciclos. Por lo tanto $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ es el número de elementos de B y $a|A| - b|B| = 0$, de donde $a|A| = b|B|$.

Problema 5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia ω, y sea P un punto sobre la extensión de AC de manera que PB y PD son tangentes a ω. La tangente en C interseca a PD en Q y a la recta AD en R. Sea E el segundo punto de intersección de AQ con ω. Muestre que B, E y R son colineales.

Solución de Alonso Roque Montoya. Para poder entender la solución que se presenta a continuación, recomendamos al lector consultar [6] y [8] de la bibliografía, para los términos de razón cruzada doble, haz armónico, puntos armónicos en una circunferencia y cuarteta armónica.

Sean U y V las intersecciones de AD con CE y BE, respectivamente. Como PB y PD son tangentes a ω y P, A, C son colineales tenemos que $ABCD$ es un cuadrilátero armónico en ω. Como E está en ω, $E(AC; BD)$ es armónico. Proyectando en la recta AD, tenemos que (AU, VD) es una cuarteta armónica.



Como QC, QD son tangentes a ω y Q, E, A son colineales con E en ω, tenemos que $CEDA$ es un cuadrilátero armónico en ω por lo que el haz $C(AE, CD)$ es armónico. Proyectando en la recta AD tenemos que (AU, RD) es una cuarteta armónica. Como (AU, VD) y (AU, RD) son cuartetas armónicas tenemos que $R = V$, de donde R es la intersección de las rectas BE y AD, y R, B y E resultan colineales.

Información Olímpica

A continuación presentamos las actividades programadas por el comité organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas de julio a septiembre de 2013.

Julio

Publicación del décimo noveno número de la revista "Tzaloa."

Julio, 18 al 28, Santa Marta, Colombia

54^a Olimpiada Internacional de Matemáticas.

Agosto, del 15 al 25, Pachuca, Hidalgo

Entrenamientos para los seleccionados nacionales y aplicación de tres exámenes selectivos para determinar la delegación para la XXVII Olimpiada Iberoamericana (4 alumnos).

2 de septiembre

Envío a los estados del examen final propuesto por el Comité Organizador de la OMM.

6 de septiembre

Aplicación en los estados registrados con este propósito del examen final propuesto por el Comité Organizador de la OMM (puede aplicarse después).

Septiembre, 22 al 28, Panamá, Panamá

XXVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad) *Si a y b son enteros, se dice que a es divisible entre b si $a = bq$ para algún entero q, y se denota por $b \mid a$.*

Definición 2 (Congruencias) *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b \pmod{m}$.*

Teorema 3 (Propiedades de las congruencias) *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$, entonces $a \equiv d \pmod{m}$.*
2. *Si $a \equiv c \pmod{m}$ y $b \equiv d \pmod{m}$, entonces $ab \equiv cd \pmod{m}$.*
3. *Si $a \equiv c \pmod{m}$, entonces $a^n \equiv c^n \pmod{m}$ para todo entero positivo n.*
4. *Si $ab \equiv bc \pmod{m}$, entonces $a \equiv c \left(\bmod \frac{m}{(b,m)}\right)$ donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 4 (Pequeño teorema de Fermat) *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

Teorema 5 (Teorema chino del residuo) *Sean $n_1, n_2, \ldots, n_k$ números naturales, primos relativos por parejas. Sea $n = n_1 n_2 \cdots n_k$ y sean $r_1, r_2, \ldots, r_k$ enteros. Entonces, el sistema lineal de congruencias dado por,*

$$\begin{aligned} x &\equiv r_1 \pmod{n_1}, \\ x &\equiv r_2 \pmod{n_2}, \\ &\vdots \\ x &\equiv r_k \pmod{n_k}, \end{aligned}$$

tiene solución y cualesquiera dos soluciones difieren por un múltiplo de n.

Teorema 6 (Inducción) *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k+1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 7 (Principio de las casillas) *Si $kn+1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene al menos $k+1$ objetos. En particular, si $n+1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene dos o más objetos.*

Teorema 8 (Desigualdad media aritmética - media geométrica) *Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n},$$

y la igualdad se cumple si y sólo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 9 (Desigualdad útil) *Si $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ son números reales e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son positivos, entonces*

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}$$

y la igualdad se cumple si y sólo si $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_n}{y_n}$.

Teorema 10 (Suma de los ángulos internos de un triángulo) *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 11 (Teorema de Pitágoras) *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 12 (Puntos y rectas notables de un triángulo)

1. *Mediana. Recta que une un vértice y el punto medio del lado opuesto.*
2. *Centroide. Punto donde concurren las medianas. También se le llama gravicentro o baricentro.*
3. *Mediatriz. Recta perpendicular a un lado que pasa por su punto medio.*

4. *Circuncentro. Punto donde concurren las mediatrices. Es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.*

5. *Bisectriz interna. Recta que divide a un ángulo interior de un triángulo en dos ángulos de la misma medida.*

6. *Incentro. Punto donde concurren las bisectrices internas. Es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.*

7. *Altura. Recta trazada desde un vértice que es perpendicular al lado opuesto de dicho vértice.*

8. *Ortocentro. Punto donde concurren las alturas.*

Definición 13 (Congruencia de triángulos) *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 14 (Criterio de congruencia LLL) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos por LLL.*

Criterio 15 (Criterio de congruencia LAL) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con dos lados correspondientes iguales y el ángulo comprendido entre ellos igual, entonces los triángulos son congruentes. A este criterio se le conoce como lado-ángulo-lado y lo denotamos por LAL.*

Criterio 16 (Criterio de congruencia ALA) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con dos ángulos correspondientes iguales y el lado comprendido entre ellos igual, entonces los triángulos son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos por ALA.*

Definición 17 (Semejanza de triángulos) *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$, $\angle BAC = \angle B'A'C'$ y $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 18 (Criterio de semejanza AA) *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A este criterio de semejanza se le conoce como ángulo-ángulo y lo denotamos por AA.*

Criterio 19 (Criterio de semejanza LAL) *Si dos triángulos tienen dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo entre dichos lados igual, entonces los triángulos son semejantes. A este criterio de semejanza se le conoce como lado-ángulo-lado y lo denotamos por LAL.*

Teorema 20 (Teorema de Thales) *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y sólo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

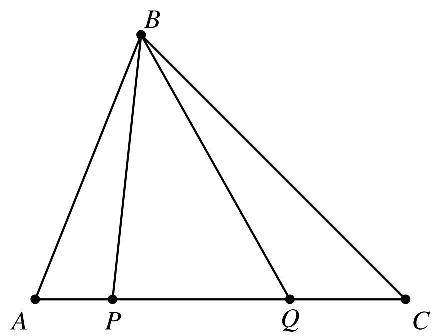
Teorema 21 (Teorema de Menelao) *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y sólo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Definición 22 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

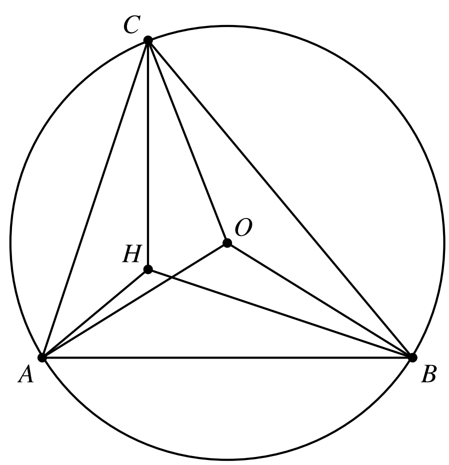
Teorema 23 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y sólo si $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°$.*

Teorema 24 *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ está circunscrito a una circunferencia (es decir, sus lados son tangentes a una misma circunferencia), si y sólo si $AB + CD = BC + DA$.*

Definición 25 (Rectas isogonales) *Dado un triángulo ABC y puntos P y Q en el lado AC, decimos que las rectas BP y BQ son isogonales si $\angle ABP = \angle QBC$.*



Teorema 26 *En todo triángulo ABC el ortocentro (H) y el circuncentro (O) son conjugados isogonales. Es decir, los segmentos AH y AO, BH y BO; y CH y CO son isogonales.*



Bibliografía

[1] T. Andreescu, D. Andrica. *Number Theory. Structures, Examples and Problems.* Birkhäuser, 2009.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, segunda edición, 2005.

[5] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[6] I. Martin Isaacs. *Geometría Universitaria.* International Thompson Editores, S.A. de C.V., 2002.

[7] I. Niven, H. Zuckerman. *Introducción a la Teoría de los Números*. Limusa-Wiley, México 1972.

[8] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

[9] N. Vilenkin. *¿De cuántas formas? (Combinatoria)*. Editorial Mir, Moscú 1972.

Directorio

Directorio del Comité Organizador de la OMM

José Antonio Gómez Ortega (presidente)
Facultad de Ciencias, UNAM
jago@ciencias.unam.mx

Ignacio Barradas Bibriesca
Universidad de Guanajuato
barradas@quijote.ugto.mx

Irving Daniel Calderón Camacho
Facultad de Ciencias, UNAM
irvingdanelc@ciencias.unam.mx

Fernando Campos García
Facultad de Ciencias, UNAM
fermexico89@hotmail.com

José Alfredo Cobián Campos
Facultad de Ciencias, UNAM
cobian@ciencias.unam.mx

David Cossío Ruiz
Depto. de Física y Matemáticas
Universidad Autónoma de Cd. Juárez
sirio11@gmail.com

Luis Cruz Romo
Sistemas de Inteligencia Territorial Estrátegica
lcruzromo@gmail.com

José Antonio Climent Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
antoniocliment@ciencias.unam.mx

Marco Antonio Figueroa Ibarra
Departamento de Matemáticas
Universidad de Guanajuato
fuerunt@gmail.com

Samantha Lizette Flores López
Instituto Tecnológico de Colima
samflo_12@hotmail.com

Luis Eduardo García Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
microtarxcaty@ciencias.unam.mx

Luis Miguel García Velázquez
Instituto de Matemáticas, UNAM
garcia.lm@gmail.com

María Eugenia Guzmán Flores
CUCEI, Universidad de Guadalajara
marugeniag@gmail.com

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
Facultad de Ciencias, UNAM
ssbmplayer@gmail.com

Daniel Perales Anaya
Facultad de Ciencias, UNAM
dperanaya@hotmail.com

María Luisa Pérez Seguí
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Michoacana de
San Nicolás de Hidalgo
psegui19@gmail.com

Miguel Raggi Pérez
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Michoacana de San Nicolás
de Hidalgo
mraggi@gmail.com

Olga Rivera Bobadilla
Facultad de Ciencias,
Universidad Autónoma del
Estado de México
olgarb@yahoo.com

Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
carlos.rubio@uady.mx

David Guadalupe Torres Flores
Departamento de Matemáticas
Universidad de Guanajuato
ddtorresf@gmail.com

Rogelio Valdez Delgado
Facultad de Ciencias, UAEM
valdez@uaem.mx

Rita Vázquez Padilla
Universidad Autónoma
de la Ciudad de México
ritavz14@gmail.com

Eduardo Velasco Barreras
Universidad de Sonora
hamsteritokeweb@hotmail.com

Hugo Villanueva Méndez
Instituto de Matemáticas, UNAM
hvillan@matem.unam.mx

Dirección Postal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

Cubículo 201, Departamento de Matemáticas.
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria.
Colonia Copilco, C.P. 04510.
Delegación Coyoacán.
México, Distrito Federal.
Teléfono: (55) 5622-4864.
Fax: (55) 5622-5410.
Email: `omm@ciencias.unam.mx`

Página oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

`http://www.ommenlinea.org`

¡Síguenos en facebook!