Gráficas dirigidas

Problema 1. En un grupo de diez alumnos, cada alumno envía 5 tarjetas de navidad a algunos de los otros. Muestre que hay 2 alumnos que se envían uno al otro tarjetas de navidad.

Solución. Entre los 10 alumnos hay $\binom{10}{2} = 45$ posibilidades de enviarse tarjetas (aristas), pero si cada uno envía 5 tarjetas, entonces hay 50 aristas dirigidas, luego deberán haber en una arista con dos aristas dirigidas, que corresponden a los 2 alumnos que se enviaron entre si tarjetas.

Problema 2. Hay 8 equipos que participaron en un torneo de básquet de todos contra todos. Muestra que hay 4 equipos A, B, C y D, tales que A le ganó a B, C y D; B le ganó a C y D y finalmente C le ganó a D.

Solución. Entre los 8 equipos hay $\binom{8}{2} = 28$ partidos, que serán las aristas. Habrá una arista dirigida entre X y Y, digamos $X \to Y$ si X le ganó a Y. Como $28 = 8 \cdot 3 + 4 > 8 \cdot 3$ se tiene que hay un equipo que lo gano a 4 o más equipos.
Digamos que A le ganó a B, C, D y E. Entre los 4 equipos hay $\binom{4}{2} = 6$ aristas dirigidas, luego como $6 > 4$ de algún vértice saldrán dos aristas dirigidas digamos de B, y supongamos que llegan a C y D y que el partido entre C y D lo ganó C.
Luego A, B, C y D son los equipos buscados.

Problema 3. Seis equipos participarón en un torneo de básquet de todos contra todos. Muestre que hay 2 equipos, tales que los restantes 4 equipos perdieron con al menos uno de los dos equipos.

Solución. Como hay $\binom{6}{2} = 15$ partidos, hay un equipo, digamos A, que ganó al menos 3 partidos y es el que ganó más partidos.
i) Si A ganó sus 5 encuentros. Entonces A y cualquier otro equipo cumple la condición.
ii) Si A ganó 4 partidos, y entonces perdió uno. Tomemos como equipo B al equipo con que perdió A.
iii) Si A ganó 3 partidos y perdió dos digamos contra B y C. Si en el partido entre B y C ganó B. Entonces A y B cumplen lo pedido.

Problema 4. Como antes, con 14 equipos (resp. con 30) hay 3 equipos (resp. 4 equipos) que juntos les ganan a los 11 equipos restantes (resp. 26 equipos restantes).

Problema 5. En un torneo de básquet de todos contra todos, ningún equipo perdió todos sus partidos. Muestra que hay tres equipos A, B y C tales que A ganó a B, B ganó a C y el C le ganó a A.

Solución. Fijémonos en la gráfica dirigida del torneo. Como cada equipo ganó al menos un partido, de cada vértice sale una arista. Buscamos un triángulo dirigido: $A \to B \to C \to A$.
Primero veamos que hay un círculo dirigido. Tomemos un equipo A_1 de él sale una arista dirigida $\{A_1, A_2\}$, de A_2 sale una arista dirigida $\{A_2, A_3\}$ y así sucesivamente.
Como solo hay un número finito de vértices en algún momento se llega a un vértice (equipo) V en el que ya se estuvo antes, la parte que va de V a V es el circuito dirigido C_1:

$$A_1 \to A_2 \to A_3 \cdots \to A_j \to V$$

tomemos este circuito y renombrando digamos que es

$$A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_k \to A_1$$

Si hay solamente 3 aristas, terminamos.
Supongamos que tiene más de 3 aristas dirigidas.
Si en el torneo hay la arista $A_3 \to A_1$, entonces A_1, A_2, A_3 son los equipos buscados.
En caso contrario está la arista $A_1 \to A_3$. Ahora si consideramos al circuito C_2.

$$A_1 \to A_3 \to A_4 \cdots \to A_k \to A_1$$

éste es de longitud menor que el anterior.
Ahora repetimos el argumento para reducir la longitud del circuito hasta llegar finalmente a un circuito con 3 aristas.

Problema 6. En un torneo de básquet de todos contra todos, participan 7 equipos, cada uno obtuvo 3 victorias. ¿Cuántas ternas de equipos hay donde cada equipo de la terna tuvo una victoria contra los equipos de la terna?

Solución. Ternas de equipos hay $\binom{7}{3} = 35$. Las ternas son de dos tipos:
tipo a: con grados de salida $1, 1, 1$
tipo b: con grados de salida $2, 1, 0$

$$\text{Luego } a + b = 35 \ldots\ldots(1)$$

Los grados de salida y llegada en cada vértice son iguales, de hecho iguales a 3, ya que cada equipo ganó 3 partidos y perdió 3.
Luego un vértice es vértice con grado de salida 1 en 9 ternas por lo que habrá $9 \cdot 7 = 63$ vértices con grado de salida 1, entre todas las ternas.
Contemos de otra manera estos vértices, en cada terna del tipo a hay 3 vértices con grado de salida 1 y en cada terna del tipo b, hay uno sólo. Luego se tendrá que:

$$3a + b = 63....(2)$$

Resolviendo el sistema, tenemos que la solución es $a = 14$.

Problema 7. En un torneo de básquet de todos contra todos, participaron varios equipos. Al final de la competencia, resultó que los equipos se podrían dividir en grupos; en el primero grupo quedó un equipo; en el segundo grupo, quedaron 2 equipos; y así sucesivamente hasta que en el k-ésimo grupo, quedaron k equipos. Además la cantidad de victorias obtenidas por los equipos en cada grupo fué la misma. ¿Cuántos equipos participaron en el torneo?

Solución. El número de equipos del torneo es:

$$n = 1 + 2 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Consideremos la gráfica dirigida con n vértices y $\binom{n}{2} = \frac{k(k+1)}{4}(n-1)$ aristas. Que es igual al número de partidos en el torneo. Por lo que el número de victorias en cada grupo es

$$v = \frac{1}{k}\binom{n}{2} = \frac{k+1}{4}(n-1)$$

En el primer grupo hay solamente un equipo, que le puede ganar a lo más a $n-1$ equipos, por lo que

$$\frac{k+4}{4}(n-1) \leq (n-1), \text{ de donde } k \leq 3.$$

Si $k = 1$, no es posible, ya que $n = 1$, luego no hay rivales y no hay torneo.
Si $k = 2$, entonces $n = 3$ y entonces victorias habrá $v = \frac{2+1}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}$ que no es un número entero, luego este caso no es posible.
Si $k = 3$, entonces $n = 6$ y $v = 5$.
Los seis equipos del torneo pueden ser A, B, C, D, E y F donde A le gana a todos, B a todos menos A, C le gana a D, E y F, D a E y F, y finalmente E le gana solamente a F. Los grupos son $\{A\}$ $\{C, D\}$ y $\{B, E, F\}$.

Problema 8. Muestre que en un torneo de todos contra todos, existe una trayectoria dirigida que pasa por todos los vértices.

Solución. Por inducción sobre el número de vértices. Tome un vértice arbitrario v. Considere a G_1 la gráfica inducida por los vértices de aristas dirigidas que llegan a v y se G_2 la gráfica inducida por los vértices de aristas dirigidas que salen de v. Por hipótesis de inducción hay una trayectoria que pasa por todos los vértices de G_1, después continua hasta v y luego continua por la trayectoria que pasa por todos los vértices de G_2, nota que ésta última necesariamente inicia en v.

Problema 9. Muestre que en un torneo de todos contra todos, existe un vértice v que se puede alcanzar a partir de cualquier otro vértice mediante un camino dirigido de longitud a lo más 2.

Solución. Por inducción sobre el número de vértices. Considere un torneo G de n vértices, fijémonos en el torneo G_1 que resulta de G al suprimir un vértice u y todas las aristas por u. Por hipótesis de inducción existe un vértice v, como se requiere en el torneo G_1. Si v no se puede alcanzar en G desde u por un camino dirigido de longitud 2 entonces v,u es una arista de G y también todos los vértices con un arista que va hacia v tienen una arista que va hacia u, en esste caso u se puede alcanzar como máximo con dos aristas.

Gráficas dirigidas

Problema 1. En un grupo de diez alumnos, cada alumno envía 5 tarjetas de navidad a algunos de los otros. Muestre que hay 2 alumnos que se envían uno al otro tarjetas de navidad.

Problema 2. Hay 8 equipos que participaron en un torneo de básquet de todos contra todos. Muestra que hay 4 equipos A, B, C y D, tales que A le ganó a B, C y D; B le ganó a C y D y finalmente C le ganó a D.

Problema 3. Seis equipos participaron en un torneo de básquet de todos contra todos. Muestre que hay 2 equipos, tales que los restantes 4 equipos perdieron con al menos uno de los dos equipos.

Problema 4. Como antes, con 14 equipos (resp. con 30) hay 3 equipos (resp. 4 equipos) que juntos les ganan a los 11 equipos restantes (resp. 26 equipos restantes).

Problema 5. En un torneo de básquet de todos contra todos, ningún equipo perdió todos sus partidos. Muestra que hay tres equipos A, B y C tales que A ganó a B, B ganó a C y el C le ganó a A.

Problema 6. En un torneo de básquet de todos contra todos, participan 7 equipos, cada uno obtuvo 3 victorias. ¿Cuántas ternas de equipos hay donde cada equipo de la terna tuvo una victoria contra los equipos de la terna?

Problema 7. En un torneo de básquet de todos contra todos, participaron varios equipos. Al final de la competencia, resultó que los equipos se podrían dividir en grupos; en el primero grupo quedó un equipo; en el segundo grupo, quedaron 2 equipos; y así sucesivamente hasta que en el k-ésimo grupo, quedaron k equipos. Además la cantidad de victorias obtenidas por los equipos en cada grupo fué la misma. ¿Cuántos equipos participaron en el torneo?

Problema 8. Muestre que en un torneo de todos contra todos, existe una trayectoria dirigida que pasa por todos los vértices.

Problema 9. Muestre que en un torneo de todos contra todos, existe un vértice v que se puede alcanzar a partir de cualquier otro vértice mediante un camino dirigido de longitud a lo más 2.