Lema de apretón de manos.

Lema de apretón de manos. En una gráfica $G = (V, E)$, se cumple que $\sum_{v \in V} d_v = 2|E|$.

Demostración. Como d_v es el número de aristas que tienen a v como uno de sus vértices, la suma cuenta el número de aristas de la gráfica, pero las aristas están contadas dos veces (una vez por cada vértice de la arista), luego la suma es el doble del número de aristas.
La identidad se puede interpretar de la siguiente manera: los vértices son personas que están en una fiesta y una arista corresponde cuando dos de las personas se estrechan las manos (un apretón de manos), la identidad ayuda a contar el número de apretones de manos.

Corolario.
- En cualquier gráfica el número de vértices de grado impar es par.
- El número de personas en una fiesta que dan un número impar de apretones de manos es par.
- Si G tiene un vértice de grado impar debe tener otro vértice de grado impar.
- Los grados de los vértices no pueden ser todos diferentes.

Demostración. Como la suma de los grados de los vértices es par, si hay un número impar a la izquierda debe haber otro número impar a la izquierda.

Problema 1. Nueve amigas acordaron enviar cada una postales navideñas a 3 de las restantes ¿Es posible que cada una reciba postales precisamente de aquellas a quienes envió las tarjetas?

Solución. Supongamos que es posible. Construyamos la gráfica donde los vértices sean las amigas y habrá una aristas entre dos amigas, si entre ellas se enviaron tarjetas. Luego la gráfica tiene 9 vértices, cada uno de grado 3. Por el lema de apretón de manos, esto es imposible ya que hay un número impar de vértices de grado impar.

Problema 2. ¿Es posible trazar en el plano 9 segmentos de manera que cada segmento corte a exactamente a otros 3 segmentos?

Solución. Construyamos la gráfica donde los vértices son los segmentos y habrá una arista entre dos segmentos si los segmentos se intersectan. Supongamos que son 9 segmentos que cumplen lo requerido. Luego la gráfica tiene 9 vértices de grado 3. Como en el problema anterior hay una contradicción.

Problema 3. En el torneo de futbol hay 18 equipos. ¿Cuál es la cantidad mínima de partidos que se han de jugar, para garantizar que entre cualquiera tres equipos, siempre se encuentre dos equipos que ya se enfrentaron?

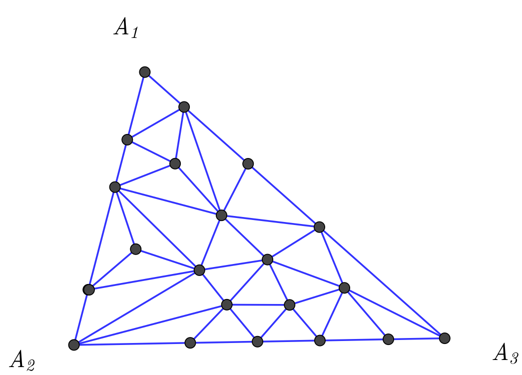
Solución. Construimos la gráfica con 18 vértices que sean los equipos y habrá una arista entre dos equipos si han jugado entre si. La hipótesis nos asegura que no hay una subgráfica con 3 vértices que no tenga sus 3 aristas, o equivalentemente toda subgráfica de 3 vértices tiene al menos una arista.
Sea v_0 el vértice de que tenga el menor grado k. Los vértices adyacentes a v_0 tienen grado mayor o igual a k. Cualquiera dos vértices de los $17-k$ vértices restantes son adyacentes, en caso contrario, estos dos vértices y v_0 dan un triángulo no permitido. Luego el grado de cada uno de estos $17-k$ vértices es mayor o igual a $(16-k)$.
Luego G tiene $k+1$ vértices de grado mayor o igual a k y $(17-k)$ vértices de grado mayor o igual a $\geq 16-k$. Por el lema de apretón de manos.

$$2(E) \geq (k+1)k + (17-k)(16-k) = 2(k-8)^2 + 144 \geq 144$$

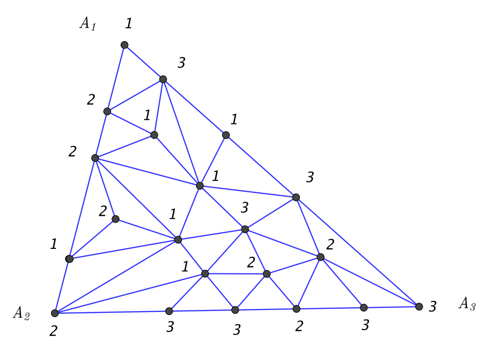
por lo que G tiene al menos 72 aristas. Un ejemplo de gráfica así es: $K_q \cup K_q$, donde la unión es ajena.

Lema de Sperner.

Consideremos un triángulo con vértices A_1, A_2, A_3, y dividamos arbitrariamente el triángulo en un número finito de triángulos más pequeños, como en el dibujo.

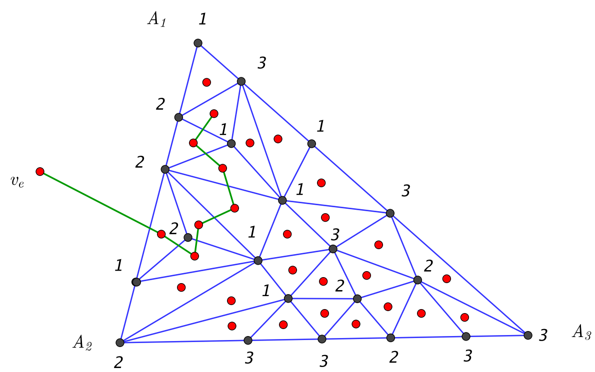


Asignamos a los vértices de los triángulos las etiquetas 1, 2 y 3 de acuerdo a:
1) A_i tiene la etiqueta i, para $i = 1, 2, 3$.
2) los vértices que están en el segmento A_iA_j tienen etiquetas i o j.
3) los otros vértices se etiquetan como sea.



Proposición (Lema de Sperner). Hay un triángulito con las 3 etiquetas $(1, 2, 3)$.

Solución. Consideremos la gráfica donde sus vértices son las caras de la triangulación del plano, esto es los triángulos pequeños y la cara *exterior* (la parta exterior del triángulo original) denotada esta última por v_e. Dos vértices determinan una arista si las caras tienen un lado común y el segmento tiene las etiquetas 1 y 2. Lo mismo pasa con la cara exterior. Un triángulo pequeño se conectará a otro, si tiene dos vértices con etiquetas 1 y 2. En esta situación tenemos que: si el otro vértice de triángulo pequeño es 1 o 2, entonces se conecta a dos vértices (triángulos) en este caso el grado es 2. Pero si el otro vértice del triángulo pequeño es 3, entonces el vértice (triángulo) se conecta solamente a otro vértice, luego su grado es 1.



Afirmamos que el vértice v_e tiene grado impar en G.
Si esto es cierto, por el lema de apretón de manos, deberá haber otro vértice de grado impar, este otro triángulo pequeño tiene las etiquetas 1, 2 y 3.

Demostración de que v_e tiene grado impar.
Consideremos el lado A_1A_2, sabemos que A_1 tiene etiqueta 1, que A_2 tiene etiqueta 2, y que en A_1A_2 los otros vértices tienen etiquetas solamente 1 o 2. El grado de v_e es igual de alternancias de las etiquetas 1 y 2 que hay en la sucesión $1 = A_1, ..., 2 = A_2$ de las etiquetas de los vértices en A_1A_2 que corresponde a los lados comunes entre la cara exterior y una cara de los triangulitos. Pero si inicia en 1 y termina en 2, deberá haber un número impar de alternancias, luego el grado de v_e es impar.

Problema 4. Si G es una gráfica con 9 vértices, cada uno de ellos de grado 5 o 6. Muestra que hay al menos 5 vértices de grado 6 o al menos 6 vértices de grado 5.

Solución. Por el lema de apretón de manos, el número de vértices de grado 5, puede ser $2, 4, 5$ u 8. Si hay 6 u 8 terminamos. Si hay 2 o 4, entonces hay respectivamente 7 o 5 vértices de grado 6 y también terminamos.

Problema 5. Muestra que si una gráfica tiene un número par de vértices, éste tiene dos vértices con un número par de vecinos comunes.

Problema 6. Enuncia y demuestra el Lema de apretón de manos para gráficas dirigidas y para torneos.

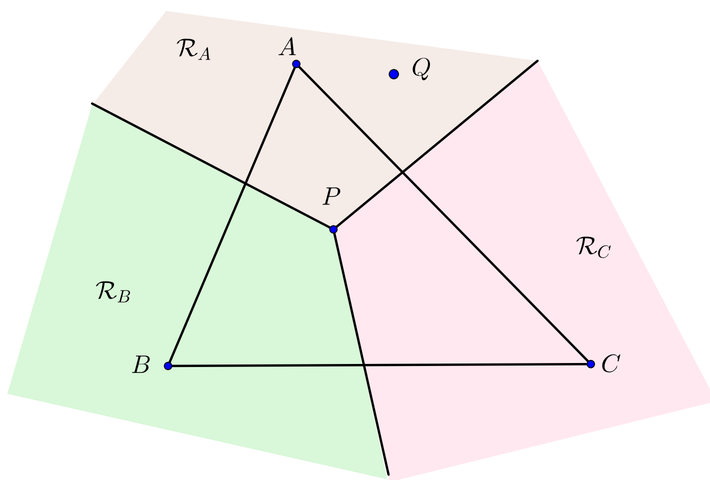
Problema 7. (Ibero, 2002) Sea $\mathcal{A}$ un conjunto de 9 puntos del plano, de manera que no hay 3 colineales. Muestra que para cada punto P del conjunto $\mathcal{A}$, el número de triángulos con vértices en tres puntos de $\mathcal{A}$ - $\{P\}$ y con el punto P en su interior, es un número par.

Solución. Si no hay triángulos con la propiedad, terminamos porque la cantidad es cero, que es par. Si hay un triángulo con vértices en tres puntos de $\mathcal{A}$ - $\{P\}$ y con el punto P en su interior, veamos que hay un número par de ellos, recuerde que el P está fijo. Para esto construimos una gráfica G.

• Los vértices son los triángulos con vértices en tres puntos de $\mathcal{A}$ - $\{P\}$ y con el punto P en su interior.

• Las aristas se forman con dos triángulos con vértices en tres puntos de $\mathcal{A}$ - $\{P\}$, con el punto P en su interior y que tengan un lado común.

Veamos que el grado de cada vértice es 5. Para un triángulo ABC con P en su interior, construimos las regiones R_A, R_B y R_C determinadas por los rayos que salen de P en direcciones PA, PB y PC, como se indica en la figura siguiente:



Sea Q un punto que está en $\mathcal{A}$ - $\{A, B, C, P\}$, entonces Q se encuentra en alguna de las regiones, digamos en R_A, luego el triángulo QBC tiene a P en su interior y los triángulos QCA y QAB no tienen a P en su interior. Luego hay una arista entre los triángulos ABC y QBC, por lo que hay 5 aristas con vértice en ABC, luego el grado de ABC es 5.

Luego por el Lema de apretón de manos deberá haber un número par de vértices.

Lema de apretón de manos.

Lema de apretón de manos. En una gráfica $G = (V,\, E)$, se cumple que $\sum_{v \in V} d_v = 2\,|E|$.

La identidad se puede interpretar de la siguiente manera: los vértices son personas que están en una fiesta y una arista corresponde cuando dos de las personas se estrechan las manos (un apretón de manos), la identidad ayuda a contar el número de apretones de manos.

Corolario.
• En cualquier gráfica el número de vértices de grado impar es par.
• El número de personas en una fiesta que dan un número impar de apretones de manos es par.
• Si G tiene un vértice de grado impar debe tener otro vértice de grado impar.
• Los grados de los vértices no pueden ser todos diferentes.

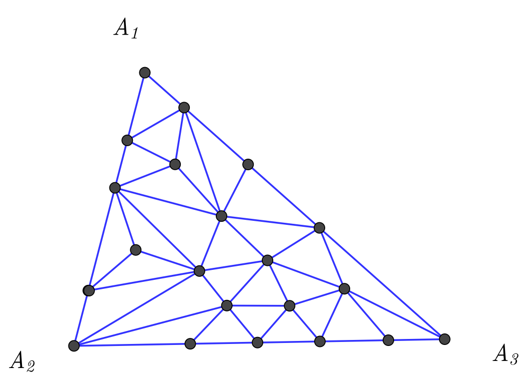
Problema 1. Nueve amigas acordaron enviar cada una postales navideñas a 3 de las restantes ¿Es posible que cada una reciba postales precisamente de aquellas a quienes envió las tarjetas?

Problema 2. ¿Es posible trazar en el plano 9 segmentos de manera que cada segmento corte a exactamente a otros 3 segmentos?

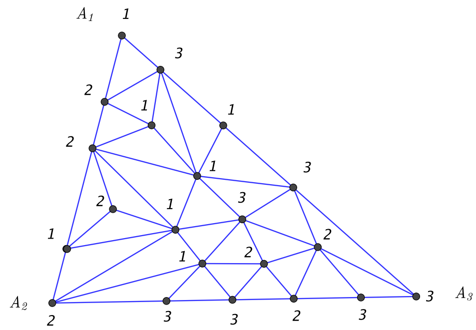
Problema 3. En el torneo de futbol hay 18 equipos. ¿Cuál es la cantidad mínima de partidos que se han de jugar, para garantizar que entre cualquiera tres equipos, siempre se encuentre dos equipos que ya se enfrentaron?

Lema de Sperner.

Consideremos un triángulo con vértices A_1, A_2, A_3, y dividamos arbitrariamente el triángulo en un número finito de triángulos más pequeños, como en el dibujo.



Asignamos a los vértices de los triángulos las etiquetas 1, 2 y 3 de acuerdo a:
1) A_i tiene la etiqueta i, para $i = 1, 2, 3$.
2) los vértices que están en el segmento A_iA_j tienen etiquetas i o j.
3) los otros vértices se etiquetan como sea.



Proposición (Lema de Sperner). Hay un triángulito con las 3 etiquetas $(1, 2, 3)$.

Problema 4. Si G es una gráfica con 9 vértices, cada uno de ellos de grado 5 o 6. Muestra que hay al menos 5 vértices de grado 6 o al menos 6 vértices de grado 5.

Problema 5. Muestra que si una gráfica tiene un número par de vértices, éste tiene dos vértices con un número par de vecinos comunes.

Problema 6. Enuncia y demuestra el Lema de apretón de manos para gráficas dirigidas y para torneos.

Problema 7. (Ibero, 2002) Sea $\mathcal{A}$ un conjunto de 9 puntos del plano, de manera que no hay 3 colineales. Muestra que para cada punto P del conjunto $\mathcal{A}$, el número de triángulos con vértices en tres puntos de $\mathcal{A}$ - $\{P\}$ y con el punto P en su interior, es un número par.