**I OMCC, Costa Rica**, 1999

Primer día

**1.** Se supone que 5 personas conocen, cada una, informaciones parciales diferentes sobre cierto asunto. Cada vez que la persona $A$ telefonea a la persona $B$, $A$ le da a $B$ toda la información que conoce en ese momento sobre el asunto, mientras que $B$ no le dice nada de él. ¿Cuál es el mínimo número de llamadas necesarias para que todos lo sepan todo sobre el asunto? ¿Cuántas llamadas son necesarias si son $n$ personas?

**2.** Encontrar un entero positivo $n$ de 1000 cifras, todas distintas de cero, con la siguiente propiedad: es posible agrupar las cifras de $n$ en 500 parejas de tal manera que si multiplicamos las dos cifras de cada pareja y sumamos los 500 productos obtenemos como resultado un número $m$ que es divisor de $n$.

**3.** Las cifras de una calculadora (a excepción del 0) están dispuestas en la forma indicada en el cuadro adjunto, donde aparece también la tecla '+'.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 8 | 9 | |
| 4 | 5 | 6 | + |
| 1 | 2 | 3 | |

Dos jugadores $A$ y $B$ juegan de la manera siguiente: $A$ enciende la calculadora y pulsa una cifra, y a continuación pulsa la tecla +. Pasa la calculadora a $B$, que pulsa una cifra en la misma fila o columna que la pulsada por $A$ que no sea la misma que la última pulsada por $A$; a continuación pulsa + y le devuelve la calculadora a $A$, que repite la operación y así sucesivamente. Pierde el juego el primer jugador que alcanza o supera la suma 31. ¿Cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y cuál es ésta?

**I OMCC, Costa Rica**, 1999

Segundo día

**4.** En el trapecio $ABCD$ de bases $AB$ y $CD$, sea $M$ el punto medio del lado $DA$. Si $\overline{BC} = a$, $\overline{MC} = b$ y el ángulo $MCB$ mide $150°$, hallar el área del trapecio $ABCD$ en función de $a$ y $b$.

**5.** Sea $a$ un entero positivo impar mayor que 17, tal que $3a - 2$ es un cuadrado perfecto. Demostrar que existen enteros positivos distintos $b$ y $c$, tales que $a+b$, $a+c$, $b+c$ y $a+b+c$ son cuatro cuadrados perfectos.

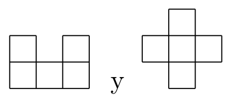
**6.** Sea $S$ un subconjunto de $\{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$ con la propiedad de que ninguna suma de dos elementos diferentes en $S$ esté en $S$. Encuentre el número máximo de elementos de $S$.

**II OMCC, El Salvador**, 2000

Primer día

**1.** Encontrar todos los números naturales de tres dígitos $abc$ ($a \neq 0$) tales que $a^2 + b^2 + c^2$ es divisor de 26.

**2.** Determinar todos los enteros $n \geq 1$ para los cuales es posible construir un rectángulo de lados 15 y $n$ con piezas congruentes a



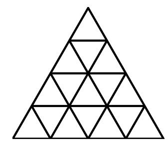
Notas: a) Las piezas no deben superponerse ni dejar huecos.
b) Los cuadritos de las piezas son de lado 1.

**3.** Sea $ABCDE$ un pentágono convexo (las díagonales quedan dentro del pentágono). Sean $P$, $Q$, $R$ y $S$ los baricentros de los triángulos $ABE$, $BCE$, $CDE$ y $DAE$, respectivamente. Demostrar que $PQRS$ es un paralelogramo y que su área es igual a $2/9$ del área del cuadrilátero $ABCD$.

**II OMCC, El Salvador**, 2000

Segundo día

**4.** En la figura, escribir un entero positivo dentro de cada triangulito, de manera que el número escrito en cada triangulito que tenga al menos dos vecinos sea igual a la diferencia de los números escritos en algún par de vecinos.



Nota: Dos triangulitos son *vecinos* si comparten un lado.

**5.** Sea $ABC$ un triángulo acutángulo, $C_1$ y $C_2$ dos circunferencias que tienen a los lados $AB$ y $CA$ como diámetros, respectivamente. $C_2$ corta al lado $AB$ en el punto $F$ ($F \neq A$) y $C_1$ corta al lado $CA$ en el punto $E$ ($E \neq A$). Además, $BE$ corta a $C_2$ en $P$ y $CF$ corta a $C_1$ en $Q$. Demostrar que las longitudes de los segmentos $AP$ y $AQ$ son iguales.

**6.** Al escribir un entero $n \geq 1$ como potencia de 2 o como suma de potencias de 2, donde cada potencia aparece a lo más dos veces en la suma, se tiene una *representación buena* de $n$.

a) Escriba las 5 representaciones buenas de 10.

¿Qué enteros positivos admiten un número par de representaciones buenas?

**III OMCC, Colombia**, 2001

Primer día

**1.** Dos jugadores $A$, $B$ y otras 2001 personas forman un círculo, de modo que $A$ y $B$ no quedan en posiciones consecutivas. $A$ y $B$ juegan por turnos alternadamente empezando por $A$. Una jugada consiste en tocar a una de las personas que se encuentra a su lado, la cual debe salir del círculo. Gana el jugador que logre sacar del círculo a su oponente. Demostrar que uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y describir dicha estrategia.

**2.** Sea $AB$ un diámetro de una circunferencia $S$ con centro $O$ y radio 1. Sean $C$ y $D$ dos puntos sobre $S$ tales que $AC$ y $BD$ se cortan en un punto $Q$ situado en el interior de $S$ y $\angle AQB = 2\angle COD$. Sea $P$ el punto de corte de las tangentes a $S$ que pasan por los puntos $C$ y $D$. Determinar la longitud del segmento $OP$.

**3.** Encontrar todos los números naturales $N$ que cumplan las dos condiciones siguientes:

- Sólo dos de los dígitos de $N$ son distintos de 0 y uno de ellos es 3.
- $N$ es un cuadrado perfecto.

**III OMCC, Colombia**, 2001

Segundo día

**4.** Determinar el menor entero positivo $n$ para el cual existan enteros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, menores o iguales que 15 y no necesariamente distintos, tales que los cuatro últimos dígitos de la suma $a_1! + a_2! + \cdots + a_n!$ sean 2001.

**5.** Sean $a$, $b$ y $c$ números reales tales que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones reales distintas $p_1$, $p_2$ y la ecuación $cx^2 + bx + a = 0$ tiene dos soluciones reales distintas $q_1$, $q_2$. Se sabe que los números $p_1$, $q_1$, $p_2$, $q_2$, en ese orden, forman una progresión aritmética. Demostrar que $a + c = 0$.

**6.** Se marcan 10000 puntos sobre una circunferencia y se numeran de 1 a 10000 en el sentido de las manecillas del reloj. Se trazan 5000 segmentos de recta de manera que se cumplan las tres condiciones siguientes:

- Cada segmento une dos de los puntos marcados.
- Cada punto marcado pertenece a uno y sólo un segmento.
- Cada segmento intersecta exactamente a uno de los segmentos restantes.

A cada segmento se le asocia el producto de los números asignados a sus dos puntos extremos. Sea $S$ la suma de los productos asociados a todos los segmentos. Demostrar que $S$ es múltiplo de 4.

**IV OMCC, México,** 2002

Primer día

**1.** ¿Para qué enteros $n \geq 3$ es posible acomodar, en algún orden, los números $1, 2, \ldots, n$ en forma circular de manera que cualquier número divida a la suma de los dos números siguientes en el sentido de las manecillas del reloj?

**2.** Sea $ABC$ un triángulo acutángulo y sean $D$ y $E$ los pies de las alturas desde los vértices $A$ y $B$, respectivamente. Muestre que si

área$(BDE) \leq$ área$(DEA) \leq$ área$(EAB) \leq$ área$(ABD)$,

entonces el triángulo es isósceles.

**3.** Para cada entero $a > 1$ se construye una lista infinita de enteros $\mathcal{L}(a)$ como sigue:

(i) $a$ es el primer número de la lista $\mathcal{L}(a)$.

(ii) Dado un número b en $\mathcal{L}(a)$, el siguiente número en la lista es $b+c$, donde $c$ es el mayor entero que divide a $b$ y es menor que $b$.

Encuentre todos los enteros $a > 1$ tales que 2002 está en la lista $\mathcal{L}(a)$.

**IV OMCC, México,** 2002

Segundo día

**4.** Sean $ABC$ un triángulo, $D$ el punto medio de $BC$, $E$ un punto sobre el segmento $AC$ tal que $BE = 2AD$ y $F$ el punto de intersección de $AD$ con $BE$. Si el ángulo $DAC$ mide $60^\circ$, encuentre la medida de los ángulos del triángulo $FEA$.

**5.** Encuentre un conjunto infinito de enteros positivos $S$ tal que para cada $n \geq 1$ y cualesquiera $n$ elementos distintos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $S$, el número $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ no es un cuadrado perfecto.

**6.** En el plano coordenado se tiene la cuadrícula de $n \times n$, con $n$ entero mayor o igual que 2, cuyos vértices son los puntos de coordenadas enteras $(x, y)$, con $0 \leq x \leq n$ y $0 \leq y \leq n$. Considere los caminos que van de $(0, 0)$ a $(n, n)$ sobre las líneas de esta cuadrícula y que sólo avanzan hacia la derecha o hacia arriba. Uno de tales caminos se llama *equilibrado* si la suma de los valores de $x$ de todos los puntos por los que pasa es igual a la suma de todos los valores de $y$ de esos mismos puntos. Muestre que todo camino equilibrado divide al cuadrado de lado $n$ en dos figuras de la misma área.

## **V OMCC, Costa Rica**, 2002

Primer día

**1.** Dos jugadores $A$ y $B$, juegan por turnos el siguiente juego: Se tiene un montón de 2003 piedras. En su primer turno, $A$ escoge un divisor de 2003, y retira ese número de piedras del montón inicial. Posteriormente, $B$ escoge un divisor del número de piedras restantes, y retira ese número de piedras del nuevo montón, y siguen así sucesivamente. Pierde el jugador que retire la última piedra. Demostrar que uno de los dos jugadores tiene una *estrategia ganadora* y describir dicha estrategia.

**Nota:** Se entiende por *estrategia ganadora* un método de juego que le garantiza la victoria al que lo aplica sin importar lo que haga su oponente.

**2.** Sea $S$ una circunferencia y $AB$ un diámetro de ella. Sea $t$ la recta tangente a $S$ en $B$ y considere dos puntos $C, D$ en $t$ tales que $B$ esté entre $C$ y $D$. Sean $E$ y $F$ las intersecciones de $S$ con $AC$ y $AD$ y sean $G$ y $H$ las intersecciones de $S$ con $CF$ y $DE$. Demostrar que $AH = AG$.

**3.** Sean $a, b$ enteros positivos, con $a > 1$ y $b > 2$. Demostrar que $a^b + 1 \geq b(a + 1)$ y determinar cuándo se tiene la igualdad.

**V OMCC, Costa Rica**, 2002

Segundo día

**4.** Sean $S_1$ y $S_2$ dos circunferencias que se intersectan en dos puntos distintos $P$ y $Q$. Sean $\ell_1$ y $\ell_2$ dos rectas paralelas, tales que:

i. $\ell_1$ pasa por el punto $P$ e intersecta a $S_1$ en un punto $A_1$ distinto de $P$ y a $S_2$ en un punto $A_2$ distinto de $P$.

ii. $\ell_2$ pasa por el punto $Q$ e intersecta a $S_1$ en un punto $B_1$ distinto de $Q$ y a $S_2$ en un punto $B_2$ distinto de $Q$.

Demostrar que los triángulos $A_1QA_2$ y $B_1PB_2$ tienen igual perímetro.

**5.** Un tablero cuadrado de 8cm de lado se divide en 64 casillas cuadradas de 1cm de lado cada una. Cada casilla se puede pintar de blanco o de negro. Encontrar el número total de maneras de colorear el tablero de modo tal que cada cuadrado de 2cm de lado formado por cuatro casillas con un vértice común, contenga dos casillas blancas y dos negras.

**6.** Digamos que un entero positivo es *tico* si la suma de sus dígitos (en base 10) es múltiplo de 2003.

i. Demostrar que existe un entero positivo $N$ tal que sus primeros 2003 múltiplos, $N, 2N, 3N, \cdots, 2003N$, son todos *ticos*.

ii. ¿Existe algún entero positivo $N$ tal que todos sus múltiplos sean *ticos*?

**VI OMCC, Nicaragua,** 2004

Primer día

**1.** En una pizarra se escriben los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Dos jugadores $A$ y $B$ juegan por turnos. Cada jugador en su turno escoge uno de los números que quedan en la pizarra y lo borra, junto con todos sus múltiplos (si los hay). El jugador que borra el último número pierde. $A$ juega primero.

Determinar si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y explicar cuál es esa estrategia.

**Nota:** Un jugador tiene una estrategia ganadora si puede garantizar su victoria, sin importar como juegue su rival.

**2.** Se define una sucesión $a_0$, $a_1$, $a_2$,... de la siguiente manera: $a_0 = a_1 = 1$ y para $k \geq 2$, $a_k = a_{k-1} + a_{k-2} + 1$.

Determinar cuántos enteros entre 1 y 2004 se pueden expresar de la forma $a_m + a_n$ con $m$ y $n$ enteros positivos y $m \neq n$.

**3.** Sea $ABC$ un triángulo. Sean $E$ y $F$ puntos en los segmentos $BC$ y $CA$ respectivamente, tales que $\frac{CE}{CB} + \frac{CF}{CA} = 1$ y $\angle CEF = \angle CAB$. Sean $M$ el punto medio del segmento $EF$ y $G$ el punto de corte de la recta $CM$ con el segmento $AB$. Demostrar que el triángulo $FEG$ es semejante al triángulo $ABC$.

**VI OMCC, Nicaragua,** 2004

Segundo día

**4.** Se tiene un tablero cuadriculado de $10 \times 10$ casillas. La mitad de sus casillas se pintan de blanco, y la otra mitad de negro. Un lado común a dos casillas en el tablero se llama *lado frontera* si estas dos casillas tienen colores diferentes. Determinar el mínimo y el máximo número de lados frontera que puede haber en el tablero. Justificar las respuestas.

**5.** Sea $ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$ y $AB + CD = AD$. Sea $P$ el punto sobre $AD$ tal que $AP = AB$ y $PD = CD$.

a) Demostrar que la medida de $\angle BPC = 90°$.

b) Sea $Q$ el punto medio de $BC$ y $R$ el punto de corte de la recta $AD$ y la circunferencia que pasa por los puntos $A$, $B$ y $Q$. Demostrar que los puntos $B$, $P$, $R$ y $C$ están sobre una misma circunferencia.

**6.** Con perlas de diversos colores se forman collares. Se dice que un collar es *primo* si no puede descomponerse en cadenas de perlas de la misma longitud, e iguales entre si.

Sean $n$ y $q$ enteros positivos. Demostrar que el número de collares primos con $n$ perlas, cada una de las cuales tiene uno de $q^n$ colores posibles, es igual a $n$ veces el número de collares primos con $n^2$ perlas, cada una de las cuales tiene uno de $q$ colores posibles.

**Nota:** Dos collares se consideran iguales si tienen el mismo número de perlas, y se puede obtener la misma coloración en ambos collares, rotando uno de ellos hasta hacerlo coincidir con el otro.

**VII OMCC, El Salvador**, 2005

Primer día

**1.** ¿De los números positivos que pueden ser expresados como suma de 2005 enteros consecutivos, no necesariamente positivos, cuál ocupa la posición 2005?

**2.** Demuestre que la ecuación $a^2b^2 + b^2c^2 + 3b^2 - a^2 - c^2 = 2005$ no tiene soluciones enteras.

**3.** En el triángulo $ABC$ sean $P$, $Q$ y $R$ los puntos de tangencia del incírculo en los lados $AB$, $BC$ y $AC$ respectivamente. Sean $L$, $M$ y $N$ los pies de las alturas del triángulo $PQR$ en $PQ$, $QR$ y $PR$, respectivamente.

a) Demuestre que las rectas $AN$, $BL$ y $CM$ se cortan en el mismo punto.

b) Demuestre que este punto común está en la recta que pasa por el ortocentro y el circuncentro del triángulo $PQR$.

**VII OMCC, El Salvador**, 2005

Segundo día

**4.** Dos jugadores llamados Azul y Rojo juegan por turnos en un tablero de $10\times 10$. Azul tiene una lata de pintura azul y Rojo una de pintura roja. Comenzando por Azul, cada jugador en su turno elige una fila o columna del tablero que no haya sido escogida anteriormente por ninguno de los dos y pinta sus 10 casillas con su propio color. Si alguna(s) de esas casillas ya estuviese pintada, el nuevo color cubre al anterior. Luego de 20 turnos, al agotarse las filas y columnas disponibles, el juego finaliza. Entonces se cuenta la cantidad de casillas de cada color y se determina el ganador de acuerdo a la siguiente regla:

> *Si la cantidad de casillas rojas supera en diez o más a la cantidad de casillas azules, entonces gana Rojo. De lo contrario gana Azul.*

Determine si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y explique cuál es la estrategia.

**5.** En un triángulo acutángulo $ABC$, sean $H$ su ortocentro y $M$ el punto medio del lado $AC$. Por $M$ se traza una recta $L$ paralela a la bisectriz del ángulo $AHC$. Demuestre que la recta $L$ divide al triángulo $ABC$ en dos partes que tienen el mismo perímetro.

**6.** Se tienen $n$ cartas numeradas de 1 a $n$ y $p$ cajas para guardarlas, con $p$ primo. Determine los posibles valores de $n$ para los que se pueden guardar todas las cartas de forma que la suma de las cartas en cada caja sea la misma.

**VIII OMCC, Panamá** 2006

Primer día

**1.** Se consideran los enteros positivos

$$S_d = 1 + d + d^2 + \cdots + d^{2006},$$

con $d = 0, 1, 2, \ldots, 9$. Halle la última cifra del número

$$S_0 + S_1 + S_2 + \cdots + S_9.$$

**2.** Sean $\Gamma$ y $\Gamma'$ dos circunferencias de igual radio con centros $O$ y $O'$ respectivamente. $\Gamma$ y $\Gamma'$ se cortan en dos pntos y $A$ es uno de ellos. Se escoge un punto $B$ cualquiera en $\Gamma$. Sea $C$ el otro punto de corte de la recta $AB$ con $\Gamma'$ y $D$ un punto en $\Gamma'$ tal que $OBDO'$ es un paralelogramo. Demuestre que la longitud del segmento $CD$ es constante, es decir que no depende de la elección de $B$.

**3.** Para cada número natural $n$, se define $f(n) = \lfloor n + \sqrt{n} + 1/2 \rfloor$. Pruebe que para cada $k \geq 1$ la ecuación

$$f(f(n)) - f(n) = k$$

tiene exactamente $2k - 1$ soluciones.

Nota: Si $x$ es un número real, el símbolo $\lfloor x \rfloor$ denota al mayor entero menor que o igual a $x$. Por ejemplo $\lfloor \frac{5}{2} \rfloor = 2$, $\lfloor -0{,}4 \rfloor = -1$, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$.

**VIII OMCC, Panamá** 2006

Segundo día

**4.** El producto de varios números enteros mayores que 0 y distintos entre si, es múltiplo de $(2006)^2$. Determine el menor valor que puede tomar la suma de esos números.

**5.** El país Olimpia está formado por $n$ islas. La isla más poblada es Panacentro y todas las islas tienen diferente número de habitantes. Se desea construir puentes entre islas que puedan transitarse en ambas direcciones de manera que cada pareja no esté unida por más de un puente. Es necesario que se cumplan las siguientes condiciones:

- Siempre es posible llegar desde Panacentro hasta cualquiera otra isla usando los puentes.
- Si se hace un recorrido desde Panacentro hasta cualquier otra isla utilizando cada puente no más de una vez, el número de habitantes de las islas visitadas es cada vez menor.

Determine el número de maneras de construir los puentes.

**6.** Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Sea $I$ el punto de intersección de las díagonales $AC$ y $BD$. Sean $E$, $H$, $F$ y $G$ puntos sobre los segmentos $AB$, $BC$, $CD$ y $DA$ respectivamente, tales que $EF$ y $GH$ se cortan en $I$. Sea $M$ el punto de intersección de $EG$ y $AC$ y sea $N$ el punto de intersección de $HF$ y $AC$. Demuestre que

$$\frac{AM}{IM} \cdot \frac{IN}{CN} = \frac{IA}{IC}.$$

**IX OMCC, Venezuela**, 2007

Primer día

**1.** La OMCC es una competencia anual de matemáticas. En el 2007 se lleva a cabo la novena olimpiada. ¿Para cuáles enteros positivos $n$ se cumple que $n$ divide al ao en que se realiza la $n$-ésima olimpiada?

**2.** Sea $ABC$ un triángulo, $D$ y $E$ puntos en los lados $AC$ y $AB$, respectivamente, tales que las rectas $BD$, $CE$ y la bisectriz que parte de $A$ concurren en un punto $P$ interior al triángulo. Demuestre que hay una circunferencia tangente a los cuatro lados del cuadrilátero $ADPE$ si y sólo si $AB = AC$.

**3.** Sea $S$ un conjunto finito de números enteros. Suponga que para cualquier par de elementos $p$, $q$ de $S$, con $p \neq q$, hay elementos $a$, $b$, $c$ de $S$, no necesariamente diferentes entre sí, con $a \neq 0$, de manera que el polinomio $F(x) = ax^2 + bx + c$ cumple que $F(p) = F(q) = 0$. Determine el máximo número de elementos que puede tener el conjunto $S$.

**IX OMCC, Venezuela**, 2007

Segundo día

**4.** Los habitantes de cierta isla hablan un idioma en el cual todas las palabras se pueden escribir con las siguientes letras: $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ y $g$. Se dice que una palabra *produce* a otra si se puede llegar de la primera a la segunda aplicando una o más veces cualquiera de las siguientes reglas:

1. Cambiar una letra por dos letras de acuerdo a las siguientes regla:

$$a \to bc,\ b \to cd,\ c \to de,\ d \to ef,\ e \to fg,\ f \to ga,\ g \to ab.$$

2. Si se encuentran dos letras iguales rodeando a otra, ellas se pueden quitar. Ejemplo: $dfd \to f$.

Por ejemplo, $cafcd$ produce a $bfcd$, porque

$$cafcd \to cbcfcd \to bfcd.$$

Demuestre que en esta isla toda palabra produce a cualquier otra palabra.

**5.** Dados dos números enteros no negativos $m$, $n$, con $m > n$, se dirá que $m$ *termina* en $n$ si es posible borrar algunos dígitos de izquierda a derecha de $m$ para obtener $n$. Por ejemplo, 329 termina en 9 y en 29, únicamente. Determine cuántos números de tres dígitos terminan en el producto de sus dígitos.

**6.** Desde un punto $P$ exterior a una circunferencia $S$ se trazan tangentes que la tocan en $A$ y $B$. Sea $M$ el punto medio de $AB$. La medíatriz de $AM$ corta a $S$ en $C$ (interior al $\Delta ABP$), la recta $AC$ corta a la recta $PM$ en $G$, y la recta $PM$ corta a $S$ en el punto $D$ exterior al triángulo $\Delta ABP$. Si $BD \parallel AC$, demuestre que $G$ es el punto donde concurren las medíanas del $\Delta ABP$.

**X OMCC, Honduras**, 2008

Primer día

**1.** Halle el menor entero positivo $N$ tal que la suma de sus cifras sea 100, y la suma de las cifras de $2N$ sea 110.

**2.** Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia de centro $O$ tal que $AC$ es un diámetro. Se construyen los paralelogramos $DAOE$ y $BCOF$. Demuestre que si los puntos $E$ y $F$ pertenecen a la circunferencia entonces $ABCD$ es un rectángulo.

**3.** Se tienen 2008 bolsas rotuladas del 1 al 2008, con 2008 ranas en cada una. Dos personas juegan alternadamente. Una jugada consiste en seleccionar una bolsa y sacar de ella la cantidad de ranas que se deseen (al menos una), quedando en ésta $x$ ranas ($x \geq 0$). Después de cada jugada, de cada bolsa con número de rótulo mayor al de la bolsa seleccionada y que contenga más de $x$ ranas, se escapan algunas hasta que queden $x$ en la bolsa. Pierde el jugador que saque la última rana de la bolsa 1. Encuentre y justifique una estrategia ganadora.

**X OMCC, Honduras**, 2008

Segundo día

**4.** Cinco amigas tienen una pequea tienda que abre de lunes a viernes. Como cada día son suficientes dos personas para atenderla, deciden hacer un plan de trabajo para la semana, que especifique quienes trabajarán cada día, y que cumpla las dos condiciones siguientes:

a) Cada persona trabajará exactamente dos días de la semana.

b) Las 5 parejas asignadas para la semana deben ser todas diferentes.

¿De cuántas maneras se puede hacer el plan de trabajo?

Ejemplo: Si las amigas son $A$, $B$, $C$, $D$ y $E$, un posible plan de trabajo sería: *lunes* $A$ y $B$, *martes* $A$ y $D$, *miércoles* $B$ y $E$, *jueves* $C$ y $E$ y *viernes* $C$ y $D$.

**5.** Halla un polinomio $P(x)$ con coeficientes reales tal que $(x+10)P(2x) = (8x-32)P(x+6)$ para todo $x$ real y $P(1) = 210$. Verifique que el polinomio encontrado cumple las condiciones.

**6.** Sea $ABC$ un triángulo acutángulo. Se toman $P$ y $Q$ en el interior de los lados $AB$ y $AC$, respectivamente, tales que $B$, $P$, $Q$ y $C$ estén en una misma circunferencia. La circunferencia circunscrita al $\triangle ABQ$ corta a $BC$ de nuevo en $S$ y la circunferencia circunscrita al $\Delta APC$ corta a $BC$ de nuevo en $R$, $PR$ y $QS$ se intersecan en $L$. Demuestre que la intersección de $AL$ y $BC$ no depende de la elección de $P$ y $Q$.

**XI OMCC, Colombia**, 2009

Primer día

**1.** Sea $P(n)$ el producto de los dígitos no nulos del entero positivo $n$. Por ejemplo $P(4) = 4$, $P(50) = 5$, $P(123) = 6$, $P(2009) = 18$. Halla el valor de la suma $P(1)+P(2)+\cdots+P(2008)+P(2009)$.

**2.** Dos circunferencias $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$ se intersectan en los puntos $A$ y $B$. Considere una circunferencia $\Gamma$ contenida en $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$, tangente a ellas respectivamente en $D$ y $E$. Sean $C$ uno de los puntos de intersección de la recta $AB$ con $\Gamma$, $F$ la intersección de la recta $EC$ con $\Gamma_2$ y $G$ la intersección de la recta $DC$ con $\Gamma_1$. Sean $H$ e $I$ los puntos de intersección de la recta $ED$ con $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$, respectivamente. Demuestre que $F$, $G$, $H$ e $I$ están sobre una misma circunferencia.

**3.** Se tienen 2009 cajas numeradas del 1 al 2009, algunas de las cuales contienen piedras. Dos jugadores $A$ y $B$ juegan alternadamente, comenzando por $A$. Una jugada consiste en seleccionar una caja $i$ que no esté vacía, tomar una o más piedras de esa caja y ponerlas en la caja $i + 1$. Si $i = 2009$, las piedras que se tomen se desechan. El jugador que retire la última piedra (dejando todas las cajas vacías) gana.

(a) Suponiendo que inicialmente en la caja 2 hay 2009 piedras y todas las demás cajas (1,3,4,5,..., 2009) están vacías, halle una estrategia ganadora para uno de los dos jugadores y justifíquela.

(b) Suponiendo que inicialmente cada caja contiene exactamente una piedra, halle una estrategia ganadora para uno de los dos jugadores y justifíquela.

**XI OMCC, Colombia**, 2009

Segundo día

**4.** Se desea colocar números naturales alrededor de una circunferencia cumpliendo la siguiente propiedad: las diferencias entre cada par de números vecinos, en valor absoluto, son todas diferentes.

(a) ¿Será posible colocar los números del 1 al 2009 satisfaciendo la propiedad?

(b) ¿Será posible suprimir alguno de los números del 1 al 2009, de tal manera que los 2008 números restantes se puedan colocar satisfaciendo la propiedad?

**5.** Dado un triángulo acutángulo y escaleno $ABC$, sean $H$ su ortocentro, $O$ su circuncentro, $E$ y $F$ los pies de las alturas trazadas desde $B$ y $C$, respectivamente. La recta $AO$ corta nuevamente al circuncírculo del triángulo en un punto $G$ y a los segmentos $FE$ y $BC$ en los puntos $X$ e $Y$, respectivamente. La recta $AH$ corta a la tangente al circuncírculo trazada por $G$ en un punto $Z$. Demuestre que $HX$ es paralelo a $YZ$.

**6.** Encuentre todos los números primos $p$ y $q$ tales que $p^3 - q^5 = (p+q)^2$.

**XII OMCC, Puerto Rico**, 2010

Primer día

**1.** Si $S(n)$ denota la suma de los dígitos de un número natural $n$, encuentre todas las soluciones de

$$n\,(S(n)-1)=2010$$

mostrando que son las únicas.

**2.** Dado el $\triangle ABC$, sean $L$, $M$ y $N$ los puntos medios de $BC$, $CA$ y $AB$, respectivamente. Se traza una tangente al circuncírculo del $\triangle ABC$ en $A$, siendo $P$ y $Q$ las intersecciones respectivas de las rectas $LM$ y $LN$ con dicha tangente. Demuestre que $CP$ es paralela a $BQ$.

**3.** Un jugador coloca una ficha en una casilla de un tablero $m \times n$ dividido en casillas de tamao $1 \times 1$. El jugador mueve la ficha de acuerdo a las siguientes reglas:

- En cada movimiento, el jugador cambia la ficha de la casilla en que ésta se encuentra a una de las casillas que tienen un lado en común con ella.
- El jugador no puede ubicar la ficha en una casilla que ésta ha ocupado previamente.
- Dos movimientos consecutivos no pueden tener la misma dirección.

El juego termina cuando el jugador no puede mover la ficha. Determine todos los valores de $m$ y $n$ para los cuales el jugador puede colocar la ficha en alguna casilla tal que ésta haya ocupado todas las casillas al terminar el juego.

**XII OMCC, Puerto Rico**, 2010

Segundo día

**4.** Se desea embaldosar un patio cuadrado de lado $N$ entero positivo. Se dispone de dos tipos de baldosas: cuadradas de $5 \times 5$ y rectangulares de $1 \times 3$. Determine los valores de $N$ para los cuales es posible hacerlo.
Nota: El patio debe quedar completamente cubierto, sin que las baldosas se sobrepongan.

**5.** Sean $p$, $q$ y $r$ números racionales distintos de cero tales que

$$\sqrt[3]{pq^2} + \sqrt[3]{qr^2} + \sqrt[3]{rp^2}$$

es un número racional distinto de cero. Pruebe que

$$\frac{1}{\sqrt[3]{pq^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{qr^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{rp^2}}$$

también es un número racional.

**6.** Sean $\Gamma$ y $\Gamma_1$ dos circunferencias tangentes internamente en $A$, de centros $O$ y $O_1$ y radios $r$ y $r_1$ ($r > r_1$), respectivamente. Sea $B$ el punto díametralmente opuesto a $A$ en la circunferencia $\Gamma$, y $C$ un punto en $\Gamma$ tal que $BC$ es tangente a $\Gamma_1$ en $P$. Sea $A'$ el punto medio de $BC$. Si se cumple que $O_1A'$ es paralela a $AP$, determine la razón $\frac{r}{r_1}$.

## **XIII OMCC, México**, 2011

Primer día

**1.** En cada uno de los vértices de un cubo hay una mosca. Al sonar un silbato, cada una de las moscas vuela a alguno de los vértices del cubo situado en una misma cara que el vértice de donde partió, pero díagonalmente opuesto a éste. Al sonar el silbato, ¿de cuántas maneras pueden volar las moscas de modo que en ningún vértice queden dos o más moscas?

**2.** Sean $ABC$ un triángulo escaleno, $D$ el pie de la altura desde $A$, $E$ la intersección del lado $AC$ con la bisectriz del $\angle ABC$, y $F$ un punto sobre el lado $AB$. Sea $O$ el circuncentro del triángulo $ABC$ y sean $X$, $Y$, $Z$ los puntos donde se cortan las rectas $AD$ con $BE$, $BE$ con $CF$, $CF$ con $AD$, respectivamente. Si $XYZ$ es un triángulo equilátero, demuestra que uno de los triángulos $OXY$, $OYZ$, $OZX$ es un triángulo equilátero.

**3.** *Aplicar un desliz* a un entero $n \geq 2$ significa tomar cualquier primo $p$ que divida a $n$ y reemplazar $n$ por $\frac{n+p^2}{p}$. Se comienza con un entero cualquiera mayor o igual a 5 y se le aplica un desliz. Al número así obtenido se le aplica un desliz, y así sucesivamente se siguen aplicando deslices. Demuestra que, sin importar los deslices aplicados, en algón momento se obtiene el número 5.

**XIII OMCC, México**, 2011

Segundo día

**4.** Encuentra todos los enteros positivos $p$, $q$ y $r$, con $p$ y $q$ números primos, que satisfacen la igualdad

$$\frac{1}{p+1}+\frac{1}{q+1}-\frac{1}{(p+1)(q+1)}=\frac{1}{r}.$$

**5.** Los números reales positivos $x$, $y$, $z$ son tales que

$$x+\frac{y}{z}=y+\frac{z}{x}=z+\frac{x}{y}=2.$$

Determine todos los valores posibles de $x+y+z$.

**6.** Sea $ABC$ un triángulo acutángulo y sean $D$, $E$ y $F$ los pies de las alturas desde $A$, $B$ y $C$, respectivamente. Sean $Y$ y $Z$ los pies de las perpendiculares desde $B$ y $C$ sobre $FD$ y $DE$, respectivamente. Sea $F_1$ la reflexión de $F$ con respecto a $E$ y sea $E_1$ la reflexión de $E$ con respecto a $F$. Si $3EF = FD + DE$, demuestre que $\angle BZF_1 = \angle CYE_1$.

Nota: La *reflexión* de un punto $P$ respecto a un punto $Q$ es el punto $P_1$ ubicado sobre la recta $PQ$ tal que $Q$ queda entre $P$ y $P_1$, y $PQ = QP_1$.

**XIV OMCC, El Salvador**, 2012

Primer día

**1.** Hallar todos los enteros positivos que sean iguales a 700 veces la suma de sus dígitos.

**2.** Sea $\gamma$ la circunferencia circunscrita al triángulo acutángulo $ABC$. Sea $P$ el punto medio del menor arco $BC$. La paralela por $P$ a la recta $AB$ intercepta $BC$, $AC$ y $\gamma$ en los puntos $R$, $S$ y $T$, respectivamente. Se definen los puntos $K$ y $L$ como las intersecciones de $AP$ con $BT$ y $BS$ con $AR$. Demostrar que la recta $KL$ pasa por el punto medio de $AB$ si y sólo si $CS = PR$.

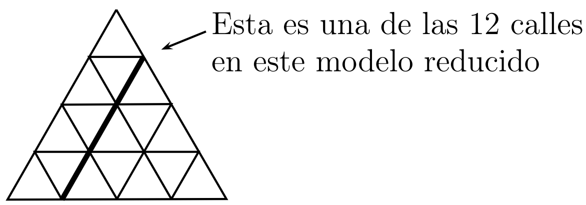
**3.** Sean $a$, $b$, $c$ números reales que satisfacen $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} = 1$ y $ab + bc + ca > 0$. Demostrar que

$$a + b + c - \frac{abc}{ab + bc + ca} \geq 4.$$

**XIV OMCC, El Salvador**, 2012

Segundo día

**4.** Trilandía es una ciudad muy peculiar. La ciudad tiene forma de triángulo equilátero de lado 2 012. Las calles dividen la ciudad en varios bloques que tienen forma de triángulo equilátero de lado 1. También hay calles en el borde de Trilandía. En total hay 6 036 calles. El alcalde quiere ubicar puestos de vigilancia en algunas esquinas de la ciudad, para vigilar las calles. Un puesto de vigilancia puede vigilar todas las calles en las que esté ubicado. ¿Cuál es la menor cantidad de puestos que se requieren para poder vigilar todas las calles de Trilandía?




**5.** Alejandro y Luisa son una pareja de ladrones. Cada día por la maana, Luisa le roba a Alejandro un tercio de su dinero, pero por la tarde sufre de un inusual ataque de conciencia y le da la mitad de todo el dinero que ella tiene. Si Luisa roba por primera vez en el día 1, y antes de eso no tenía dinero, ¿cuál es la menor cantidad entera positiva de dinero que Alejandro debe tener para que al final del día 2012 ambos tengan una cantidad entera de dinero?

**6.** Sea $ABC$ un triángulo con $AB < BC$, y sean $E$ y $F$ puntos en $AC$ y $AB$, respectivamente, tales que $BF = BC = CE$, ambos ubicados en el mismo lado que $A$ respecto de $BC$. Sea $G$ la intersección de $BE$ con $CF$. Se toma un punto $H$ sobre la paralela a $AC$ por $G$ tal que $HG = AF$ (con $H$ en distinto lado que $C$ respecto de $BG$). Demostrar que $\angle EHG = \dfrac{\angle BAC}{2}$.

**XV OMCC, Nicaragua**, 2013

Primer día

**1.** Juan escribe la lista de parejas $(n, 3^n)$, con $n = 1, 2, 3, \ldots$ en un pizarrón. A medida que va escribiendo la lista, subraya las parejas $(n, 3^n)$ cuando $n$ y $3^n$ tienen la misma cifra de las unidades. De las parejas subrayadas, ¿cuál ocupa la posición 2013?

**2.** Alrededor de una mesa redonda están sentadas en sentido horario las personas $P_1$, $P_2$,..., $P_{2013}$. Cada una tiene cierta cantidad de monedas (posiblemente ninguna); entre todas tienen 10000 monedas. Comenzando por $P_1$ y prosiguiendo en sentido horario, cada persona en su turno hace lo siguiente:

- Si tiene un número par de monedas, se las entrega todas a su vecino de la izquierda.
- Si en cambio tiene un número impar de monedas, le entrega a su vecino de la izquierda un número impar de monedas (al menos una y como máximo todas las que tiene), y conserva el resto.

Pruebe que, repitiendo este procedimiento, necesariamente llegará un momento en que todas las monedas estén en poder de una misma persona.

**3.** Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y $M$ el punto medio del lado $AB$. La circunferencia que pasa por $D$ y es tangente a $AB$ en $A$ corta al segmento $DM$ en $E$. La circunferencia que pasa por $C$ y es tangente a $AB$ en $B$ corta al segmento $CM$ en $F$. Suponga que las rectas $AF$ y $BE$ se cortan en un punto que pertenece a la medíatriz del lado $AB$. Demuestre que $A$, $E$ y $C$ son colineales si y sólo si $B$, $F$ y $D$ son colineales.

**XV OMCC, Nicaragua**, 2013

Segundo día

**4.** Ana y Beatriz alternan turnos en un juego que se inicia con un cuadrado de lado 1 dibujado en un tablero infinito. Cada jugada consiste en dibujar un cuadrado que no se superponga con la figura ya dibujada, de manera que uno de sus lados sea un lado (completo) del rectángulo que está dibujado. Gana el juego aquella persona que logre completar una figura cuya área sea múltiplo de 5. Si Ana realiza la primera jugada, ¿existe estrategia ganadora para alguna jugadora?

**5.** Sea $ABC$ un triángulo acutángulo y sea $\Gamma$ su circuncírculo. La bisectriz del ángulo $A$ interseca a $BC$ en $D$, a $\Gamma$ en $K$ (distinto de $A$), y a la tangente a $\Gamma$ por $B$ en $X$. Demuestre que $K$ es el punto medio de $AX$ si y sólo si $\frac{AD}{DC} = \sqrt{2}$.

**6.** Determine todas las parejas de polinomios no constantes $p(x)$ y $q(x)$, cada uno con coeficiente principal 1, grado $n$ y $n$ raíces enteras no negativas, tales que $p(x) - q(x) = 1$.

## **XVI OMCC, Costa Rica**, 2014

Primer día

**1.** Un entero positivo se denomina *tico* si es el producto de tres números primos diferentes que suman 74. Verifique que 2014 es tico. ¿Cuál será el próximo ao tico? ¿Cuál será el último ao tico de la historia?

**2.** Sea $ABCD$ un trapecio de bases $AB$ y $CD$, inscrito en una circunferencia de centro $O$. Sea $P$ la intersección de las rectas $BC$ y $AD$. Una circunferencia por $O$ y $P$ corta a los segmentos $BC$ y $AD$ en puntos interiores $F$ y $G$, respectivamente. Muestre que $BF = DG$.

**3.** Sean $a$, $b$, $c$ y $d$ números reales todos distintos entre sí, tales que

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 4, \qquad y \qquad ac = bd.$$

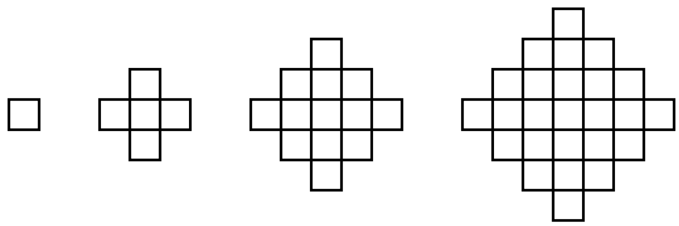
Determine elo máximo valor posible de

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b}.$$

**XVI OMCC, Costa Rica**, 2014

Segundo día

**4.** Con cuadrados de lado 1 se forma en cada etapa una figura en forma de escalera, siguiendo el patrón del dibujo.



Por ejemplo, la primera etapa utiliza 1 cuadrado, la segunda utiliza 5, etc. Determine la última etapa para la cual la figura correspondiente utiliza menos de 2014 cuadrados.

**5.** Se marcan los puntos $A$, $B$, $C$ y $D$ sobre una recta, en esae orden, con $AB$ y $CD$ mayores que $BC$. Se construyen triángulos equiláteros $APB$, $BCQ$ y $CDR$, con $P$, $Q$ y $R$ en el mismo lado respecto a $AD$. Si $\angle PQR = 120°$, pruebe que

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{BC}.$$

**6.** Un entero positivo $n$ es *divertido* si para todo $d$ divisor positivo de $n$, $d+2$ es un número primo. Encuentre todos los números divertidos que tengan la mayor cantidad posible de divisores.