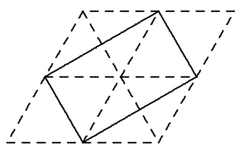
Soluciones del Examen Canguro Matemático 2000

1. Marca las 9:45. La respuesta es e).

2. Si cortamos una esquina del triángulo de forma que el corte NO se haga por la diagonal del cuadrado, tendremos cinco esquinas en lugar de cuatro en la región más grande. Esto quiere decir que al cortar una esquina del cuadrado, lo más que podemos hacer es agregar otra. Así pues, el máximo de esquinas que puedo tener son 8. La respuesta es e).

3. Para las centenas tenemos cinco opciones: 4, 9, 2, 1 y 5. La menor de ellas es 1, así que eliminamos los que están antes que 4, 9 y 2. Para las decenas hay dos opciones: 5 y 0, de las cuales la menor es 0, así que eliminamos el 5. Queda el número 108. La respuesta es d).

4. Un rectángulo, como se observa en la figura. La respuesta es b).



5. En dos horas, el entrenador lava 3 elefantes y su hijo lava 1, así que juntos lavan 4 elefantes en 2 horas y lavarán 3 elefantes en $3 \times \frac{2}{4} = 1.5$ horas. La respuesta es d).

6. Dibujamos los cuartos de la tira de papel y los numeramos de izquierda a derecha. Si cortamos por esas marcas, quedan los cuatro pedazos numerados, todos del mismo tamaño. Ahora, las marcas que dividen el papel en terceras partes quedan en los pedazos número 2 y 3, y, si volviéramos a unirlos, las marcas serían simétricas, por lo que, al cortarlos nuevamente, ambos pedazos (2 y 3) quedarían divididos de la misma forma. Pero este último corte dividió cada segmento en dos pedazos de longitudes diferentes además de los pedazos 1 y 4 que son de igual longitud. Por lo tanto hay piezas de tres longitudes diferentes. La respuesta es b).

7. El área de la rebanada es proporcional al ángulo comprendido entre los radios. Así, cuando el ángulo es de 360^o, el área de la rebanada es igual a la del pastel. Entonces, para que el sector sea el 15% del área del círculo, el ángulo debe medir 15% de 360^o: 54^o. La respuesta es c).

8. 100 pesos tienen el mismo valor que $\frac{100}{8} = 12.5$ lipras. 12.5 lipras equivalen a 250 bólares, así que 100 bólares tienen el mismo valor que $\frac{12.5}{2.5} = 5$ lipras. La respuesta es b).

9. La cantidad de días que pasan antes de que vuelvan a reunirse todos debe ser divisible por 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7. Si multiplicamos $4 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$ tenemos el mínimo común múltiplo los números, así, el menor número de días en el que se reencontrarán es 420. La respuesta es d).

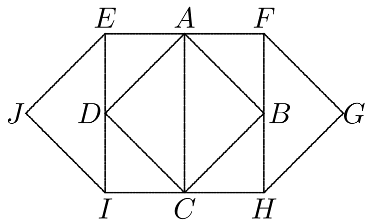
10. Uno de los enteros, digamos a, debe ser par, mientras que el otro, b, debe ser impar. Como $4^3 = 64 > 57$, tenemos que $a = 2$; entonces es fácil ver que $b = 5$. La respuesta es b).

11. El triángulo ABC es isósceles ($AB = AC$), lo que implica que $\angle ABC = \angle ACB = 75^o$, y que

$$\angle BAC = 180^o - (75^o + 75^o) = 30^o.$$

El triángulo ADC es isósceles ($AD = DC$), lo que implica que $\angle DAC = \angle DCA = \frac{(180^o - 50^o)}{2} = 65^o$. Observemos que $\angle BAD = \angle CAB + \angle DAC = 30^o + 65^o = 95^o$. La respuesta es d).

12. En la figura, el área del triángulo ABC es igual a la del triángulo FGH, y el área del triángulo ACD es igual a la del triángulo EIJ. Entonces, el área sombreada es igual al área del cuadrado $EFHI$, que es 9. Entonces la respuesta es a).



13. Tenemos que $\text{CANGUROS} = 10\,000 \times \text{CANG} + \text{UROS}$, así es que

$$\begin{aligned}&10\,000 \times \text{UROS} - 10\,000 \times \text{CANG} + 10\,000 \times \text{CANG} + \text{UROS}\\ &= 10\,000 \times \text{UROS} + \text{UROS} = \text{UROSUROS}.\end{aligned}$$

La respuesta es a).

14. Si Q le hubiera dado la mano a T, entonces ni P ni Q ni T le hubieran dado la mano a nadie más, lo cual no es posible pues R le dio la mano a dos amigos. La respuesta es d).

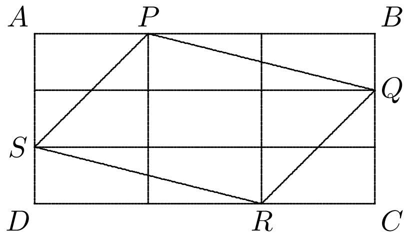
15. Observemos que $5.625 = \frac{5625}{1000} = \frac{45}{8}$, que es una fracción simplificada y, por lo tanto, tenemos que multiplicar por 8 para poder obtener un entero que sea la suma de las calificaciones de los jueces. La respuesta es c).

16. Como el número de chocolates del piso de arriba es 77, la cantidad de chocolates a lo largo por la cantidad de chocolates a lo ancho es 77. Las posibilidades son 11 a lo largo y 7 a lo ancho, o 77 a lo largo, en una sola hilera. Como al final quedan chocolates en la caja, la posibilidad correcta es la primera: 11×7. Como después de comerse el piso de arriba quedan 55 en un costado, cuando la caja estaba llena debió tener 6 chocolates a lo alto. Así, inicialmente había $7 \times 6 \times 11 = 462$ chocolates. Originalmente en el frente de la caja había $7 \times 6 = 42$ chocolates, de los cuales Alicia se comió primero 7 de la fila de arriba y 5 que quedaban en la fila de un costado. Quedan $462 - 77 - 55 - 30 = 300$ chocolates. La respuesta es d).

17. Como se quedó con 3 dulces, el número inicial de dulces termina en 3 o en 8, pero como es un múltiplo de 6, es par, por lo que termina en 8. La única posibilidad es 78. La respuesta es b).

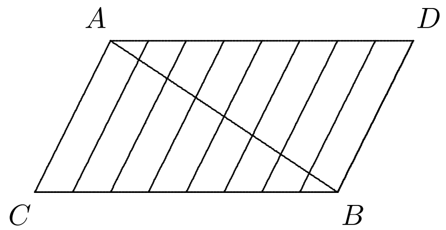
18. Doblando dos cuadrados que tengan las regiones inmediatas a una misma arista del mismo color, nos damos cuenta de que necesitamos que los vértices en que esas aristas convergen tengan todas las regiones que incluyen a esa arista del mismo color. Cada arista tiene tres regiones cercanas, por lo cual el número de regiones de cada color debe ser divisible entre tres. Solamente a) y d) cumplen con este requisito, y es fácil darse cuenta de que al doblar a) hay varias aristas que no comparten regiones del mismo color. La respuesta es d).

19. Dibujamos paralelas al lado AD por P y R y también al lado AB por S y Q. Cada uno de los rectángulos pequeños representa $\frac{1}{9}$ del área original. El área de los triángulos rectángulos que tienen como cateto un lado del rectángulo $PQRS$ es un $\frac{1}{9}$ del área de $ABCD$. Así, el área de $PQRS$ es $\frac{1}{9}+\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$ del área de $ABCD$. La respuesta es d).



20. Como se comió los dulces de 3 en 3, sólo pueden quedar dulces de aquéllos de los que originalmente no había una cantidad múltiplo de 3: los verdes. La respuesta es d).

21. Tracemos por A una paralela a BC y por B una paralela a AC. Si D es su punto de intersección, cada uno de los segmentos paralelos a AC que se han dibujado son del mismo tamaño. La suma de las longitudes de los segmentos paralelos dentro del triángulo ABC es igual a la suma de las longitudes de los segmentos paralelos dentro del triángulo ABD. Así, la suma de los segmentos en un solo triángulo es igual a $\frac{7\times 10}{2}=35$. La respuesta es d).



22. Cada vez que se concede un deseo el pedazo de piel se reduce a $\frac{1}{6}$ de su área. Después de conceder 3 deseos, el pedazo de piel tiene un área de $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$ veces el área original. Al principio, el pedazo de piel tenía un área de $4\times 216=864\,\text{cm}^2$, y como se trataba de un rectángulo donde una arista medía 9 cm, la otra medía 96 cm. La respuesta es b).

23. Observemos que $96=2^5\times 3$. Entonces los únicos divisores de 96 que están entre 5 y 20 son $2\times 3=6$, $2^2\times 3=12$, $2^3=8$ y $2^4=16$. Por lo tanto sólo podemos hacer equipos de cuatro maneras diferentes. La respuesta es d).

24. Dividir 1 entre 5^{2000} es lo mismo que calcular $\left(\frac{1}{5}\right)^{2000}=(0.2)^{2000}$. Al elevar 0.2 a alguna potencia, observemos el comportamiento de su última cifra:

$$\begin{aligned}(0.2)^1 &= \ldots 2\\(0.2)^2 &= \ldots 4\\(0.2)^3 &= \ldots 8\\(0.2)^4 &= \ldots 6\\(0.2)^5 &= \ldots 2\\&\vdots\end{aligned}$$

La secuencia se repite en lo sucesivo cada 4 números y, como 2000 es múltiplo de 4, es fácil observar que la última cifra no cero en la división será 6. La respuesta es c).