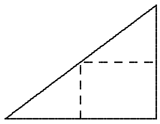
Soluciones del Examen Eliminatorio de la
16a Olimpiada Mexicana de Matemticas, 2002

1. Doblando por las líneas punteadas obtenemos un rectángulo, como se muestra en la figura.



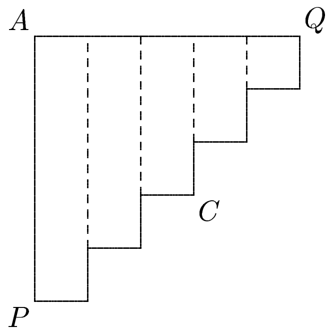
2. Lápices de distintos colores no se guardan en un mismo estuche, así que podemos contar por separado cuántos estuches se necesitarán para cada color. Como $179 = 17 \times 10 + 9$, Luis necesitará $17 + 1 = 18$ estuches para guardar los del primer color. De la misma manera, necesitará $12 + 1 = 13$ estuches para guardar los del otro color (pues $121 = 12 \times 10 + 1$). En total Luis necesitará $18 + 13 = 31$ estuches.

3. Cada vez que tomo un dulce de la canasta izquierda tomo uno de la canasta del centro al siguiente paso. Lo mismo es cierto para la canasta derecha. Voy a tomar 11 dulces, para ese momento habré tomado 5 dulces de una canasta lateral y 6 de otra. Así, la canasta con más dulces tendrá 6 dulces.

4. La región sombreada consiste de dos partes que encajan en un círculo de radio 2. Así, su área es 4π.

5. Las repeticiones son $1 + 2 + 3$. Por lo tanto se numeraron 36 cajas.

6. El camino de P a Q que pasa por A es igual de largo que el camino que pasa por C ya que en este último el total de las longitudes horizontales es el mismo que la longitud de AQ (como se muestra en la figura); y de la misma manera, el total de longitudes verticales de es el mismo que la longitud PA. Así tenemos que el camino que pasa por C es 215 m más largo que el que pasa por B.

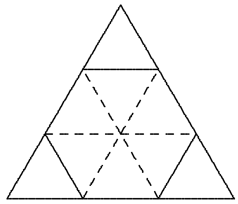


7. Como el producto de b por c es c, tenemos que $b = 1$. Entonces $a \cdot b \cdot c = a \cdot 2 = 12$ y $a = 6$.

8. Tenemos que $\angle OND + \angle ONA = 180^o$; como $\angle OND = 60^o$, entonces $\angle OND = 120^o$. Por otro lado, AC es diagonal del cuadrado, así que $\angle CAN = 45^o$. Entonces, $\angle NOA = 180^o - \angle NAO - \angle ONA = 180^o - 120^o - 45^o = 15^o$.

9. El pequeño Koala come $\frac{1}{10}$ de las hojas del árbol cada hora, mientras papá y mamá comen $\frac{2}{10}$ cada uno. Juntos comen $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ de las hojas por hora, así que tardarán dos horas en comerse todas las hojas del árbol.

10. Cada uno de los triángulos pequeños de la figura tienen la misma área, y tenemos entonces que $H = \frac{6}{9}T = \frac{2}{3}T$.



11. El primer reloj tarda 27 minutos para que caiga toda la arena que contiene, así que el segundo reloj tiene $\frac{1}{3}$ de la arena que tiene el primero, es decir, $9\,\text{cm}^3$.

12. En la primera ronda, Ana tomó de la primera mesa $\frac{2001}{3} = 667$ frijoles, mientras que Beto tomó 400, ya que $\frac{2001}{5} = 400.2$, pero Ana y Beto siempre recogen frijoles completos. Como en la primera mesa quedaron 1334 frijoles y $\frac{1334}{5} = 266.8$, Ana tomó 266 frijoles mientras que Beto tomó 533 (el mayor entero menor a $\frac{1600}{3}$). En las dos rondas Ana y Beto recogieron la misma cantidad de frijoles: $667 + 266 = 400 + 533 = 933$.

13. El número de estudiantes debe ser múltiplo de 29, de $69 = 3 \times 23$ y de $87 = 3 \times 29$. El mínimo común múltiplo de estos tres números es $3 \times 29 \times 23 = 2001$.

14. María hizo 6 movimientos en un minuto para dejar 13 monedas en cada montón. Si un montón empezó con 6 o menos de 6 monedas habría sido imposible completar 13 monedas en un montón. Así, si el montón más pequeño tiene 7 monedas y los otros tienen, por ejemplo, 19, 13, 13 y 13, después de un minuto María completará 13 monedas en cada montón.

15. Es fácil ver que si nos fijamos en la posición de la tarjeta número 1 necesitaremos 9 movimientos para que esta tarjeta regrese a su lugar original. Es claro que lo mismo sucede para el resto de las tarjetas.

16. Observemos que los números 6, 5 y 3 comparten un vértice. Si quisiéramos tener un producto mayor tendríamos que cambiar alguno de los números por otro más grande, y la única manera de hacerlo sería sustituyendo el 3 por el 4, pero eso es imposible ya que 6, 5 y 4 no comparten un vértice. Entonces el producto mayor es $6 \times 5 \times 3 = 90$.

17. Como el triángulo ABC y el triángulo BCD tienen la misma base y la misma altura, entonces también tienen la misma área. Así, $\text{área}(ABCD) = \text{área}(ABD) + \text{área}(BCD) = \text{área}(ADB) + \text{área}(ACB)$. Entonces tenemos que $\frac{\text{área}(ABCD)}{\text{área}(ACB)} = \frac{\text{área}(ADB)}{\text{área}(ACB)} + \frac{\text{área}(ACB)}{\text{área}(ACB)} = \frac{\text{área}(ADB)}{\text{área}(ACB)} + 1 = 3$, de donde $\frac{\text{área}(ADB)}{\text{área}(ACB)} = 2$.

18. El peso del cuerpo de Desí que no es agua es $\frac{15}{100} \times 800\,\text{Kg} = 120\,\text{Kg}$. Cuando Desí está sediento, los $120\,\text{Kg}$ de Desí que no son agua constituyen el 16% de su peso, así que total su peso total es $\frac{100}{16} \times 120 = 750$.

19. Como 2001 y $3b$ son múltiplos de 3, a también debe ser un múltiplo de 3. El único número que no lo es es 1001. En los demás casos, a es múltiplo de 3 y podemos tomar $b = \frac{2001-a}{3}$, que es un entero.

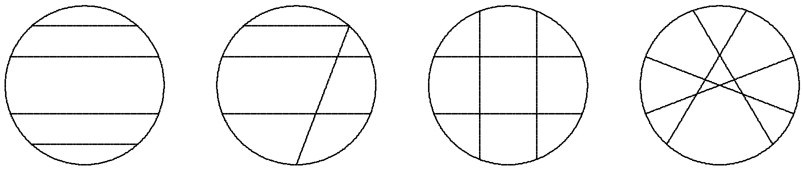
20. Considerando los 6 dados exteriores antes de pegarlos, el total de puntos en sus superficies es $6(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 126$. A esta cantidad hay que restarle la suma de los puntos en

la superficie del dado que quedará al centro (cada uno de los dados de afuera se pega por el mismo número al dado central), que es $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Así, la cantidad de puntos que quedaron en la superficie es $126 - 21 = 105$.

21. Los 32 nudos están en los vértices de un pedazo rectangular de red de $m \times n$ cuadritos donde $m \times n = 32$. Como el perímetro de la toda la red tiene 28 corchos, sabemos que $2m+2n+4 = 28$, de donde $m+n = 12$. El total de hoyitos de toda la red es $(m+1)(n+1)$. Como $32 = 1 \times 32 = 2 \times 16 = 4 \times 8$ y m y n son ambos menores que 12, entonces m y n deben ser 8 y 4. Así, el total de hoyitos es $(8 + 1)(4 + 1) = 45$.

22. Observemos que el menor número de dígitos necesarios para que la suma sea 2001 es 223 puesto que $2001 = 222 \times 9 + 3$. De hecho, la suma de las cifras del número que se escribe como un 3 seguido de 222 nueves es 2001. Cualquier otro número positivo que empiece con un dígito menor necesitará más cifras para que la suma sea 2001. Así, la respuesta es 3.

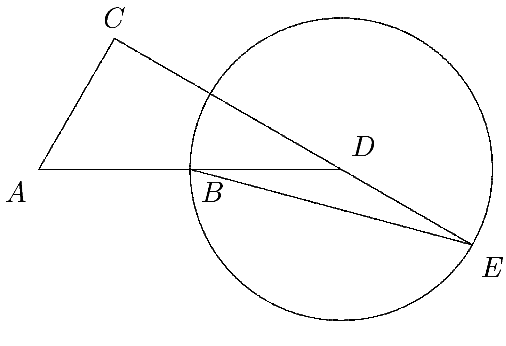
23. Con un solo corte tenemos 2 pedazos. Siempre que hacemos un corte añadimos un pedazo por cada corte que ya habíamos hecho y que no intersectamos, y dos pedazos por cada corte que sí intersectamos. Así, entre 5 (cortando sin intersectar) y $2 + 2 + 3 + 4 = 11$ todos los números de rebanadas son posibles.



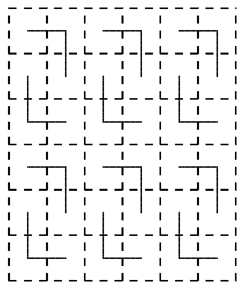
5 7 9 11

24. En alguno de sus saltos Cangú tuvo una puntuación mayor o igual a 15 pues si en todos sus saltos le hubieran dado a lo más 14 puntos, lo más que podría haber obtenido al final es $14 \times 4 = 56$. Sin embargo, 15 no pudo ser su puntuación mínima, ya que $15 \times 5 = 75 > 72$. Entonces la más alta de las puntuaciones mínimas que pudo obtener Cangú es 14 (sus calificaciones pudieron ser, por ejemplo, 14, 14, 14, 15 y 15), así que la mínima calificación de Cangú al eliminar su peor salto es $72 - 14 = 58$.

25. El punto E se encuentra en el círculo que tiene centro en D y radio $AB = DB$, como se muestra en la figura. Como E está lo más lejos posible de C, entonces E se encuentra en la prolongación de la línea CD. Como $\angle ABC + \angle CBD = 180^o$, entonces $\angle CBD = 120^o$. El triángulo CBD es isósceles, así es que $\angle BDC = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^o$ y $\angle BDE = 150^o$. Como el triángulo BDE también es isósceles, entonces $\angle BED = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^o$.

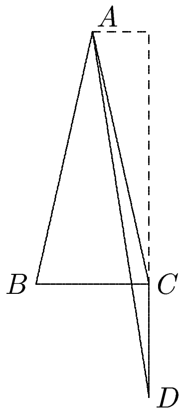


26. Si podemos construir un cuadrado con k piezas, entonces $3k$ debe ser un cuadrado: $k = 3n^2$, para algún entero n. Para $n = 1$ tenemos $k = 3$, y es fácil ver que no se pueden acomodar tres piezas para formar un cuadrado. Con $n = 2$ tenemos $k = 12$, y podemos formar un cuadrado como el que se muestra.



27. Sea a la edad del menor y $2a$ la del mayor. Tenemos que $1664 = 13 \times 2^6$. Observemos que a no puede ser un múltiplo de 13 porque entonces 1664 sería un múltiplo de $13 \times 26 = 338$. De aquí sabemos que existe un hermano mediano cuya edad es múltiplo de 13, y que la edad del menor y del mayor son potencias de 2. Claramente a no puede ser 2 ni 4. Si el hijo menor tiene 8 años y el mayor tiene 16, debe haber otro hermano en medio que tenga 13 años. No hay otra posibilidad.

28. El triángulo ABC es isósceles y la distancia de A a CD es $\frac{BC}{2} = \frac{3}{2}$ porque BC es perpendicular a CD. Así, el área del triángulo ACD es igual a $\frac{1}{2}\frac{CD\times 3}{2} = \frac{9}{4}$.



29. Imaginemos que las cajas están todas vacías y que vamos metiéndolas en orden. Al principio tenemos 11 cajas grandes vacías. Si decidiéramos llenar alguna de estas cajas tendríamos una caja vacía menos, pero habría 8 cajas vacías más (las que se van a meter en esa caja grande); entonces al final de esta operación tendríamos 1 caja llena y 7 cajas vacías más. Con las cajas medianas pasa lo mismo: por cada caja llena se agregan 7 vacías. El número de cajas vacías debe ser $11 + 7k$ donde k es el número de cajas que se llenaron. Como $102 = 11 + 7 \times 13$, sólo tenemos cajas se llenan 13 cajas, así que en total tenemos $102 + 13 = 115$ cajas.

30. Hay 12 pentágonos en total y cada uno toca cinco hexágonos, o sea que hay $12 \times 5 = 60$ costuras entre hexágonos y pentágonos. Cada hexágono está unido con otros 3 pentágonos, (tiene 3 costuras de este tipo) así que el total de hexágonos es $\frac{60}{3} = 20$.