Canguro Matemático Mexicano 2006
Nivel Olímpico
Soluciones

1. **(c)** Por cada \$30 se consiguen 4 paquetes, así que con \$150 se consiguen $4 \times 5 = 20$ paquetes.

2. **(a)** El área sombreada de la bandera es
$$\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$$

3. **(d)** Digamos que x es el número de nietos. Entonces $2x + 3 = 3x - 2$, de donde $x = 5$.

4. **(d)** Si dividimos el pentágono en 10 triángulos iguales uniendo el centro con los vértices y con los puntos medios de los lados observamos que el área sombreada es de $\frac{3}{10}$.

5. **(a)** Para obtener el número más pequeño debemos elegir cada vez la tarjeta que empieza con el dígito menor; así, el orden debe ser 2, 309, 41, 5, 68 y 7.

6. **(d)** La cantidad debe ser un múltiplo de 4 y de 9 mayor que 50 y menor que 100, es decir, 72.

7. **(d)** La mayor área que podemos obtener es la del cuadrado más pequeño que contiene a la figura original (observemos que el perímetro es el mismo). Para completar ese cuadrado hace falta sombrear 16 cuadritos.

8. **(c)** La distancia entre los relojes crece a razón de 1.5 minutos por hora. Para llegar a 60 minutos, tienen que pasar 40 horas.

9. **(b)** Como 2000 estudiantes participaron en alguna de las olimpiadas podemos calcular los que participaron en ambas de la siguiente manera: $1500 + 1200 - 2000 = 700$.

10. **(a)** El objeto es azul o amarillo. Si fuera amarillo sería un cuadrado, pero entonces tendría que ser rojo lo cual no puede ser. Así, el objeto tiene que ser redondo y azul.

11. **(c)** Del total, Francisco pagó $\frac{60}{100}$, Arturo pagó $\frac{40}{100} \times \frac{40}{100} = \frac{16}{100}$, así que Gabriela pagó $\frac{100-60-16}{100} = \frac{24}{100}$. Haciendo una regla de tres, el total de la cena es $\frac{30\times 100}{24} = 125$.

12. **(d)** Llamemos x a la longitud del cuadrado más pequeño. Notemos que la suma de los tres segmentos sobre el lado inferior del rectángulo es igual a la suma de los segmentos del lado superior, es decir $x + x + (x+1) = (x+1) + (x+2)$, de donde $x = 7$.

13. **(d)** Sea n la cantidad de miembros de la familia Quintos. Tenemos que $38 + 14(n-1) = 18n$, de donde $n = 6$.

14. **(b)** El múltiplo de 7 más cercano a 1000 es 994 (se necesitan 142 saltos). Los 6 metros restantes se tendrían que cubrir con un salto de 4 y uno de 2. El total de saltos es 144.

15. **(c)** Deben voltearse 2 tarjetas: la que muestra E (para ver si es cierto que del otro lado hay un número par) y la que muestra 7 (pues del otro lado no debería haber vocal).

16. **(a)** Haciendo los primeros casos es fácil convencerse de que para hacer la figura número n se agregan $4n$ palitos; así, para la 31ª figura se agregan $4 \times 31 = 124$ palitos a la figura anterior.

17. **(a)** Tenemos que $\frac{e}{a} = \frac{bcde}{abcd} = \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4} = \frac{15}{8}$.

18. **(e)** Si el primer martes par fue el 2, los siguientes serían $2 + 14 = 16$ y $2 + 28 = 30$ (claramente no hay más opciones). El día 21 fue 5 días después del martes 16, así que fue domingo.

19. **(e)** Si el número original es $ab2$ tenemos que $100a + 10b + 2 - 36 = 200 + 10a + b$, de donde $a + b = 10$.

20. **(c)** La mayor cantidad de calcetines que Mario puede sacar sin encontrar un solo par son 30 calcetines. Para garantizar todos los pares que desea es suficiente sacar 7 calcetines más; en total Mario tendría que sacar 37 calcetines.

21. **(a)** El área de la región sombreada es la mitad del área de un cuadrado menos el área del triángulo pequeño, es decir, $\frac{1}{2} - \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{2} = \sqrt{2} - 1$.

22. **(b)** El radio de los círculos pequeños es la mitad del radio del círculo grande, así que su área es la cuarta parte del grande y tenemos:

$$R + 2G = \frac{1}{4}(4R + 4G + 4B) = R + G + B,$$

de donde $B = G = 400$.

23. **(b)** Observemos que cada pico de la estrella es un triángulo equilátero. Entonces tres lados consecutivos del hexágono miden lo mismo que un lado de los triángulos equiláteros originales y entonces el perímetro del hexágono es $\frac{2}{3}$ el perímetro de uno de los triángulos, es decir, 12cm.

24. **(b)** Al sumar 10 números consecutivos distintos, cada uno termina en un dígito distinto, así que la suma de todos termina en lo que termina $0 + 1 + 2 + \cdots + 9 = 45$, o sea, en 5. Como la suma dio 2006, entonces el número que se eliminó termina en 9; la única posibilidad es 219 (y los números son: $218, 219, \cdots, 227$).

25. **(e)** En cada cuadrito se han marcado la cantidad de caminos distintos que pasan por él.

1	1	1	1	1
1	2	3	4	1
1	1	1	4	5
1	1	2	2	7
1	1	3	5	12

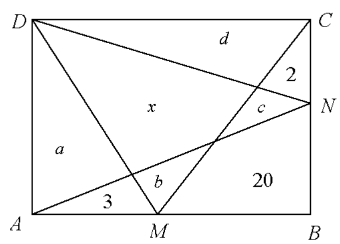
26. **(e)** El área de cada cuadrado es $\frac{125}{5} = 25$, así que cada lado mide 5cm. La longitud que buscamos es $\sqrt{125} - 10 = 5(\sqrt{5} - 2)$.

27. **(b)** Cada ángulo interno del pentágono mide 108º, por lo tanto, cada dos reflexiones sucesivas, el pentágono habrá rotado 216º. Así, el pentágono regresará a su posición original cuando se haya rotado una cantidad de grados múltiplo de 360. Como $m.c.m.(108, 360) = 1080$, hacen falta 5 rotaciones para regresar a la posición original, lo que equivale a 10 reflexiones.

28. **(d)** Tenemos que

$$\begin{aligned}
x-y &= 1^2+2^2+\cdots+2005^2-1\cdot 3-2\cdot 4-\cdots-2004\cdot 2006\\
&= 1(1-3)+2(2-4)+\cdots+2004(2004-2006)+2005^2\\
&= (1+2+\cdots+2004)(-2)+2005^2\\
&= \frac{(2005\cdot 2004)(-2)}{2}+2005^2\\
&= 2005(-2004+2005)\\
&= 2005
\end{aligned}$$

29. **(e)** Observemos que en la figura, la mitad del área del rectángulo es igual a $a+x+c$ pero también es igual a $a+3+20+c+2$; al igualar estas dos cantidades y cancelar $a+c$ obtenemos $x=25$.



30. **(c)** Sea x el número de *falsos* que hay en la clave. Si $0\le x\le 5$, es claro que puede haber exactamente $5-x$ aciertos (todos entre las respuestas *verdadero* del estudiante), así que se debe cumplir que $x\le 1$ para garantizar al menos 4 aciertos. Esto se puede hacer de 11 maneras. Si $5\le x\le 10$, es claro también que puede haber exactamente $5-x$ aciertos (todos entre las respuestas *falso* del estudiante), así que se debe cumplir que $x\ge 9$.para garantizar 4 aciertos. Esto se puede lograr de otras 11 formas.