Soluciones para el Examen Eliminatorio Estatal de la OMM 2009

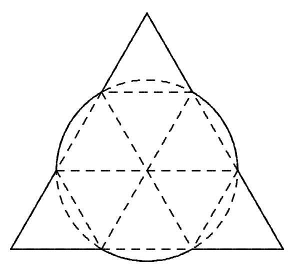
1. **(a)** En total son $27+1+13=41$ casas y Pedro vive en la casa que está en la posición 21 de izquierda a derecha. Como Ana está en la posición 28, entre las dos casas hay 6 casas.

2. **(c)** La suma de las respuestas de los niños debe ser igual a la suma de las respuestas de las niñas.

3. **(c)** Los perímetros son $9\cdot 4=36$, así que el triángulo tiene lado $\frac{36}{3}=12$ y entonces dos lados del rectángulo miden también 12 y el otro lado mide $\frac{36-12\cdot 2}{2}=6$.

4. **(e)** Puede pagar todos los precios del 1 al 15 pues corresponde a la expansión binaria. En efecto, obviamente puede pagar 1, 2, 4 y 8, y $3=1+2$, $5=1+4$, $6=2+4$, $7=1+2+4$ y, al sumar 8 a cada uno de los números ya obtenidos obtenemos los números del 9 al 15.

5. **(b)** Partamos el triángulo en triángulos equiláteros de lado 1 como indica la figura. Entonces todos los ángulos miden 60°, así que el perímetro es $6+\pi$ cm.



6. **(a)** Entre las 19:30 y las 6:15 hay 13:15 horas. Doce horas después el reloj marcaría las 18:15; a esta cantidad todavía hay que restarle 1:15 horas.

7. **(e)** Si ponemos I por izquierda y D por derecha, las figuras se lograron con las sucesiones siguientes: (a) $DIDDDI$, (b)$IDDDID$, (c) $DDIIDD$, (d) $DDIDDD$ y (e) $DIIIDD$. Entonces $\heartsuit$ representa D y $\spadesuit$ representa I.

8. **(a)** Como 21 es impar y 30 es par por lo menos hay una mujer. Tenemos $30=21+1+2+2+2+2$ así que son 5 personas y los zapatos se pudieron haber agrupado como sigue: $(21,22)$, $(22,24)$, $(24,26)$, $(26,28)$ y $(28,30)$.

9. **(c)** Como hay 5 veces más rojas que azules, y las azules son $\frac{1}{8}$ del total, las rojas son $\frac{5}{8}$ del total. Entonces las 6 canicas verdes corresponden a $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ del total. Tengo 24 canicas.

10. **(b)** Empezamos al revés: 2009 es divisible entre 7 pero no entre 6, así que el camino de abajo no puede seguirse. Por otro lado, $2009+49=2058=7^3\cdot 6$. Los dos caminos desde A hasta el cuadro que está arriba de B multiplican dos veces por 7 y una por 6, así que ambos son posibles y se empieza por el mismo número (que es el 7).

11. **(d)** En total hay 4 tarjetas pares y 4 impares. Como $1+2+3+4+5+6+7+8 = 36$, la suma en cada caja debe ser 18 que es par. Tenemos dos posibilidades: que en A haya 2 impares y una par (y entonces en B hay 2 impares y 3 pares), o que en A haya 3 pares (y entonces en B están las 4 impares y una par). De aquí vemos que las condiciones (a) y (b) son falsas. Por otro lado, si alguna de las tarjetas 1 o 2 está en A, lo más que podría ser la suma es $2 + 7 + 8 = 17$ así que forzosamente estas tarjetas están en B. Vemos tambíen que es posible que la tarjeta 5 esté en A junto con las tarjetas 6 y 7 (y entonces en B quedarían 1, 2, 3, 4 y 8). La única condición forzada es que en B esté la tarjeta 2.

12. **(d)** Es posible poner 9 de los números como sigue: 10, 5, 1, 8, 4, 2, 6, 3, 9. Falta sólo 7 pero éste sólo podría ponerse junto a 1 y esto disminuiría la cantidad de números en la lista.

13. **(e)** Si llamamos a al primer número de la lista y b al segundo, entonces la lista es:

$$a, b, a+b, a+2b, 2a+3b, 3a+5b, 5a+8b$$

El cuarto número de la lista es $a + 2b = 6$ y el sexto es $3a + 5b = 15$. Multiplicamos la primera ecuación por 3 y le restamos la segunda para obtener $b = 3$; entonces $a = 0$ y el séptimo número es $5a + 8b = 24$.

(a) 9 (b) 16 (c) 21 (d) 22 (e) 24

14. **(d)** Abajo de los cuadros con C y D deben ir A y B, pero como en el tercer renglón y tercera columna hay B los colores del tercer renglón deben ser, en orden, B, A, B. Entonces en el 2º renglón arriba de B debe ir C (si no, sería A pero compartiría un vértice con la A que está en el tercer renglón). Así sucesivamente los tres primeros renglones quedan determinados y el 4º renglón se forma alternando C y D (en cualquier orden) y el 5º renglón se forma alternando B y A (en ese orden). Las dos posibilidades se muestran en la figura (y también en el quinto renglón pueden intercambiarse A y B).

A	B	A	B	A
C	D	C	D	C
B	A	B	A	B
C	D	C	D	C
B	A	B	A	B

A	B	A	B	A
C	D	C	D	C
B	A	B	A	B
D	C	D	C	D
B	A	B	A	B

15. **(e)** Observemos que $y = (2^3)^8 = 2^{24}$. También tenemos que $z = 3^{12} < 4^{12} = (2^2)^{12} = 2^{24}$.

16. **(b)** Lo mínimo se logra al poner 1 en el cuadro superior izuierdo y multiplicar por 2 hacia la derecha y por 3 hacia abajo como se muestra en el esquema.

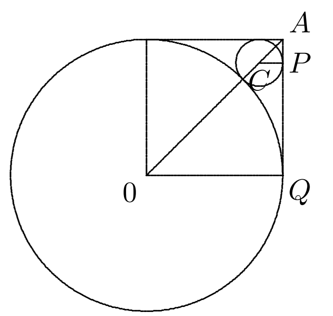
1	2	4	8
3	6	12	24
9	18	36	72

17. **(e)** Llamemos r al radio del círculo menor. Por Pitágoras tenemos que la diagonal del cuadrado mide $\sqrt{2}$. Sean A el vértice exterior del cuadrado, C el centro del círculo pequeño , O el centro del círculo grande y P y Q los puntos de tangencia de los círculos con el cuadrado como se muestra en la figura. Entonces los triángulos ACP y AOQ son semejantes, de donde los cocientes de las hipotenusas de éstos entre un cateto son iguales:

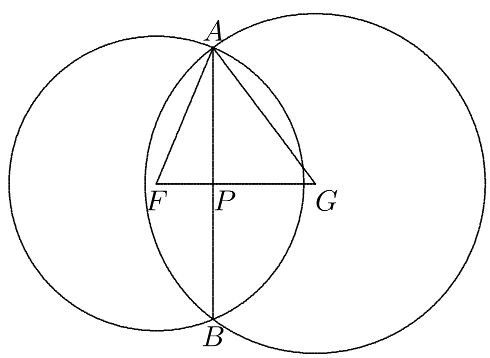
$$\frac{\sqrt{2}-1-r}{r} = \frac{\sqrt{2}}{1}.$$

Despejando r obtenemos

$$r = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = (\sqrt{2}-1)^2.$$



18. **(d)** La figura es como se muestra abajo y tenemos $|AP| = 12 = |PB|$. Por Pitágoras $|FP| = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ y $|PG| = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$.



19. **(a)** Planteamos la siguiente ecuación, donde x es el número de segmentitos que debemos movernos a partir de la posición de $\frac{1}{5}$ para llegar a $\frac{1}{4}$:

$$\frac{1}{5} + \frac{x}{16}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{4}.$$

Multiplicamos por $16 \cdot 5$ para obtener

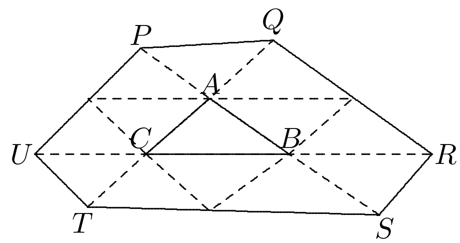
$$16 + 5x\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = 20,$$

de donde

$$x\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5}.$$

Ahora multiplicamos por 15 y obtenemos $(5-3)x = 12$, y entonces $x = 6$.

20. **(d)** Al trazar paralelas a los lados del triángulo ABC por los vértices opuestos como se muestra en la figura, el hexágono queda dividido en 13 triángulos iguales.



21. **(c)** Dos caras comparten la arista que tiene los vértices numerados con 1 y 5, así que los dos otros vértices de esas caras deben tener el mismo número, digamos a. Ahora nos fijamos en el vértice inferior de la figura; éste forma parte de tres triángulos, y los otros extremos de éstos son a y 5 o a y a, de donde tenemos que $a = 5$ y entonces el vértice inferior tiene el mismo número que el superior (es decir, 1). La suma de todos es $1 + 5 + 5 + 5 + 1 = 17$.

22. **(b)** Para cualquier x sabemos que $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Entonces para $n = 8$ tenemos

$$(2^2-1)(3^2-1)\cdots(n^2-1) = (1\cdot 3)(2\cdot 4)(3\cdot 5)(4\cdot 6)(5\cdot 7)(6\cdot 8)(7\cdot 9) = (2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7)^2,$$

y ésta es la primera vez que se obtiene un cuadrado (para ver esto hay que ir contando cada vez que aparece un primo en la factorización; se logra un cuadrado cuando cada primo aparece un número par de veces).

23. **(c)** En el primer renglón tenemos que $2\blacksquare + \varnothing = 11$. Al multiplicar la segunda columna por 2 tenemos $2\blacksquare + 4\varnothing = 20$. Al restar éstas dos obtenemos $3\varnothing = 9$, de donde $\varnothing = 3$ y entonces $\blacksquare = 4$. En el segundo renglón tenemos $\varnothing + \blacksquare + \triangle = 8$; sustituyendo los valores obtenidos y despejando tenemos que $\triangle = 1$. Entonces $\blacksquare + \varnothing - \triangle = 4 + 3 - 1 = 6$.

24. **(a)** Supongamos que el lado del cuadrado grande mide 4 y así el radio de cada círculo mide 1. Tenemos que en cada círculo la cuarta parte de él está sombreada, así que la región sombreada total dentro de los círculos es de π. Por otro lado, el cuadrado pequeño tiene lado 2, así que el área sombrada dentro de este cuadrado es de $4-\pi$. Entonces el total de área sombreada es de 4 y, como el área total del cuadrado grande es de 16, el área sombrada es la cuarta parte.

25. **(b)** Supongamos que tomamos z litros del primer recipiente. Entonces estamos tomando $1-z$ litros del segundo y la cantidad de jugo de naranja que queda en el tercer recipiente es $.6z+.8(1-z)$ litros. Esto debe ser el doble de la cantidad de agua así que tenemos la ecuación $.6z+.8(1-z)=2(.4z)$, de donde $6z+8-8z=8z$ y de aquí que $z=.8$. La cantidad de limón es $(1-.8)(.2)=.04$.

26. **(c)** La primera persona no pudo haber dicho la verdad pues eso querría decir que todas las demás son mentirosas pero al decir también que las otras son mentirosas habrían dicho la verdad. Entonces la primera persona dijo mentira, de lo cual se deduce que la segunda persona dijo verdad, la tercera mentira y así sucesivamente.

27. **(b)** La mínima longitud se logra poniendo los cuadrados lo más pequeño posible. Como 2009 no es un cuadrado, no es posible poner cuadrados de lado 1. El menor cuadrado mayor que 2009 es $45^2=2025$. Ahora, $2025-2009=16$, así que se pueden poner dos cuadrados de 3×3 y 2007 cuadrados de tamaño 1.

28. **(d)** Hay 9 calcetines en total, así que 3 tienen hoyo. Lo peor que podría pasar es que sacara 2 calcetines de cada color y que uno de cada color tuviera hoyo. Al sacar 7 calcetines, esto ya no es posible.

29. **(c)** Como D es divisible entre 45, el número es divisible entre 3. Además observemos que debe tenerse que $N=Dd$, así que $N=45d^2$. Las posibilidades son $d=2$ (y entonces $N=45\cdot 4$) y $d=3$ (y entonces $N=45\cdot 9$).

30. **(e)** Se puede asegurar que al menos $85-(100-90)=75$ resolvieron los primeros dos problemas; que $80-(100-75)=55$ resolvieron los tres primeros problemas y que $70-(100-55)=25$ resolvieron los cuatro problemas.