

28^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Nacional

Toluca, Estado de México, 10 de noviembre de 2014

Primer día

1. Cada uno de los números del 1 al 4027 se ha coloreado de verde o de rojo. Cambiar el color de un número es pasarlo a verde si era rojo, y pasarlo a rojo si era verde.

Diremos que dos enteros positivos m y n son cuates si alguno de los números $\frac{m}{n}$ o $\frac{n}{m}$ es un número primo. Un *paso* consiste en elegir dos números que sean cuates y cambiar el color de cada uno de los números.

Muestra que después de realizar algunos pasos es posible hacer que todos los números del 1 al 2014 sean verdes.

2. Un entero positivo a se reduce a un entero positivo b , si al dividir a entre su dígito de las unidades se obtiene b . Por ejemplo, 2015 se reduce a $\frac{2015}{5} = 403$.

Encuentra todos los enteros positivos que, mediante algunas reducciones, llegan al número 1. Por ejemplo, el número 12 es uno de tales enteros pues 12 se reduce a 6 y 6 se reduce a 1.

3. Sean Γ_1 una circunferencia y P un punto fuera de Γ_1 . Las tangentes desde P a Γ_1 tocan a la circunferencia en los puntos A y B . Considera M el punto medio del segmento PA y Γ_2 la circunferencia que pasa por los puntos P , A y B . La recta BM interseca de nuevo a Γ_2 en el punto C , la recta CA interseca de nuevo a Γ_1 en el punto D , el segmento DB interseca de nuevo a Γ_2 en el punto E y la recta PE interseca a Γ_1 en el punto F (con E entre P y F).

Muestra que las rectas AF , BP y CE concurren.

Segundo día

4. Sea $ABCD$ un rectángulo con diagonales AC y BD . Sean E el punto de intersección de la bisectriz del ángulo $\angle CAD$ con el segmento CD , F el punto sobre el segmento CD tal que E es el punto medio de DF y G el punto sobre la recta BC tal que $BG = AC$ (con C entre B y G).

Muestra que la circunferencia que pasa por D , F y G es tangente BG .

5. Sean a , b y c números reales positivos tales que $a + b + c = 3$. Muestra que

$$\frac{a^2}{a + \sqrt[3]{bc}} + \frac{b^2}{b + \sqrt[3]{ca}} + \frac{c^2}{c + \sqrt[3]{ab}} \geq \frac{3}{2},$$

y determina para que números a , b y c se alcanza la igualdad.

6. Para cada entero positivo n , sea $d(n)$ la cantidad de divisores positivos de n . Por ejemplo, los divisores positivos de 6 son 1, 2, 3 y 6, por lo que $d(6) = 4$.

Encuentra todos los enteros positivos n tales que

$$n + d(n) = d(n)^2.$$