29^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Nacional

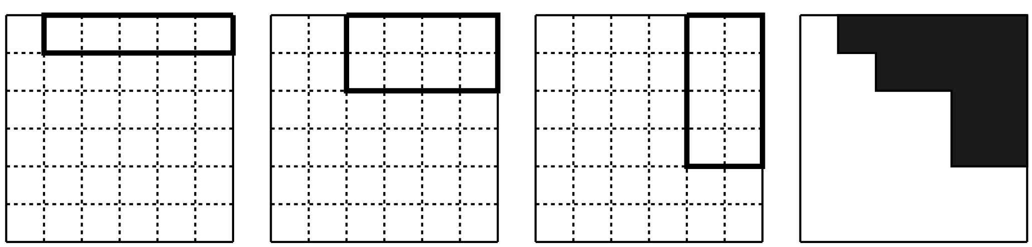
Guadalajara, Jalisco, 2015
Primer día

1. Sea ABC un triángulo y sea H su ortocentro. Sea PQ un segmento que pasa por H con P en AB, Q en AC y tal que $\angle PHB = \angle CHQ$. Finalmente en el circuncírculo del triángulo ABC, considera M el punto medio del arco BC que no contiene a A. Muestra que $MP = MQ$.

2. Sea n un entero positivo y k un entero entre 1 y n. Se tiene un tablero de $n \times n$ color blanco. Se hace el siguiente proceso. Se dibujan k rectángulos con lados de longitud entera, con lados paralelos a los del tablero y tales que su esquina superior derecha coincide con la del tablero. Luego, estos k rectángulos se rellenan de negro. Esto deja una figura blanca en el tablero.

   ¿Cuántas figuras blancas diferentes podemos obtener, que no se puedan obtener haciendo el proceso con menos de k rectángulos?

   Nota: A continuación se muestra un ejemplo para un tablero de 6×6. Se dibujan 3 rectángulos, uno de 1×5, uno de 2×4 y uno de 4×2, para obtener la figura blanca indicada en el tablero de la derecha.



3. Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ el conjunto de los números enteros positivos. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función, la cual asigna a cada número entero positivo, un número entero positivo. Supón que f satisface las siguientes dos condiciones:

   a) $f(1) = 1$.

   b) Para todos a, b enteros positivos, se cumple que

   $$f(a + b + ab) = a + b + f(ab).$$

   Encuentra el valor de $f(2015)$.

Segundo día

4. Sea n un entero positivo. María escribe en un pizarrón las n^3 ternas que se pueden formar tomando tres enteros, no necesariamente distintos, entre 1 y n, incluyéndolos. Después, para cada una de las ternas, María determina el mayor (o los mayores, en caso de que haya más de uno) y borra los demás. Por ejemplo, en la terna $(1, 3, 4)$ borrará los números 1 y 3, mientras que en la terna $(1, 2, 2)$ borrará sólo el número 1.

   Muestra que, al terminar este proceso, la cantidad de números que quedan escritos en el pizarrón no puede ser igual al cuadrado de un número entero.

5. Sea I el incentro de un triángulo acutángulo ABC. La recta AI corta por segunda vez al circuncírculo del triángulo BIC en E. Sean D el pie de la altura desde A sobre BC y J la reflexión de I con respecto a BC. Muestra que los puntos D, J y E son colineales.

6. Sea n un entero positivo y sean $d_1, d_2, \ldots, d_k$ todos sus divisores positivos ordenados de menor a mayor. Considera el número

$$f(n) = (-1)^{d_1} d_1 + (-1)^{d_2} d_2 + \cdots + (-1)^{d_k} d_k.$$

   Por ejemplo, los divisores positivos de 10 son 1, 2, 5 y 10, así que

$$f(10) = (-1)^1 \cdot 1 + (-1)^2 \cdot 2 + (-1)^5 \cdot 5 + (-1)^{10} \cdot 10 = 6.$$

   Supón que $f(n)$ es una potencia de 2. Muestra que si m es un entero mayor que 1, entonces m^2 no divide a n.