Soluciones del examen de invitación a la OMM, 2017 (versión A)

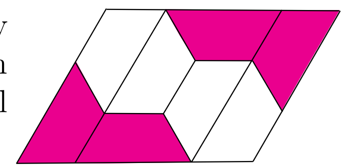
1. **(e)** Es una cuadrícula de 5×8, así que tiene 40 cuadritos. La mitad deben de ser grises, pero hay 12 grises. Faltan 8.

2. **(b)** $66 = 12 \times 5 + 6$, así que puede usar 5 cajas para 12 huevos y una caja para 6.

3. **(e)**.

4. **(d)** Tenemos que $24 = 2^3 \times 3$, así que las posibilidades para las cifras del número son $(8, 3, 1, 1)$, $(4, 2, 3, 1)$, $(4, 6, 1, 1)$, $(2, 2, 2, 3)$ y $(2, 2, 6, 1)$. Las respectivas sumas son 13, 10, 12, 9 y 11, de manera que son 5 posibilidades.

5. **(a)** Trazando dos paralelas a los lados que están a 60º y que pasan por los centros de los hexágonos, se parte la figura en 8 medios hexágonos de los cuales 4 están sombreados. Entonces el área sombreada es la mitad del área del paralelogramo.



6. **(b)** Si el peso que puede soportar el elevador es P, cada adulto debe pesar en promedio $\frac{P}{12}$ y cada niño $\frac{P}{20}$. Luego en promedio, 3 adultos pesan lo mismo que 5 niños. Por lo que si en el elebador hay 9 adultos, entonces el elevador puede soportar 3 adultos más o 5 niños más.

7. **(c)** El anillo original tiene 4 gramos de plata y 6 gramos de oro. El nuevo anillo tendrá $4 + 2 = 6$ gramos de plata, que será el 30 % del total; por lo que 2 gramos de plata es el 10 %. Así $2 \cdot 7 = 14$ gramos representará el 70 % del anillo, que son los gramos que deberá tener de oro, por lo que le faltan 8 gramos de oro.

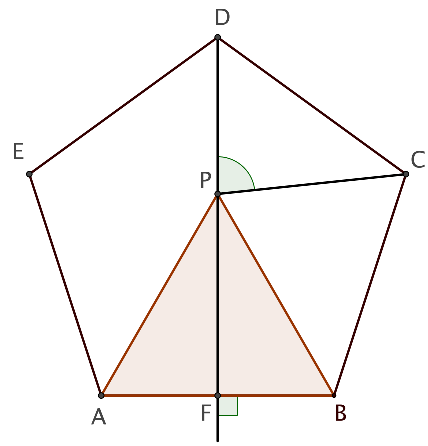
8. **(d)** Las tarjetas que debe voltear son las que tienen número par: 4 y 8 (porque si tuvieran consonante del otro lado, habría dicho mentira), y también la que tiene M (pues es consonante y debe verificar que detrás haya un número impar). Las otras dos tarjetas no se necesitan voltear, atrás de una tarjeta con vocal puede haber un número par o impar sin que eso afecte lo que afirma Pedro.

9. **(e)** Para que el triángulo n esté encima del triángulo 0 debe ocurrir que $100 \cdot n$ sea un múltiplo de 360. El múltiplo más pequeño de 100 y 360 es 1800, así que $n = \frac{1800}{100} = 18$.

10. **(b)** La suma de todos los cuadros se puede obtener como la de las 3 columnas o la de los 2 renglones; de esta manera tenemos que la suma de las columnas es par y la de los renglones es múltiplo de 3. Entonces los únicos números que puede ir encima del 2 son el 1 o el 4. Pero 1 no es posible, ya que la segunda columna sumaría 3 y la tercera 5 o más, luego debe ser 4. Luego la suma de los números en cualquier columna es 6, así que el número en la casilla sombreada es 2 y la figura queda completa como sigue:

1	4	4
5	2	2

11. **(d)** La mediatriz del segmento AB pasa por D, P y el punto medio F de AB.



Ahora el triángulo PFB es un triángulo rectángulo con $\angle FPB = 30^o$, y el triángulo BCP es isósceles. Como los ángulos internos del pentágono regular miden 108^o, se tiene que $\angle CBP = 108^o - 60^o = 48^o$. Por lo que $\angle BPC = \angle PCB = \frac{1}{2}(180^o - 48^o) = \frac{1}{2}(132^o) = 66^o$. Luego $\angle CPD = 180^o - \angle FPB - \angle BPC = 180^o - 30^o - 66^o = 84^o$.

12. **(c)**

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{10} \frac{1}{p_n q_n} &= \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 11} + \frac{1}{7\cdot 11} + \frac{1}{7\cdot 11} + \frac{1}{7\cdot 11} = \\ &= \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 5} + \frac{2}{5\cdot 7} + \frac{4}{7\cdot 11} = \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{11} = \frac{9}{22}.\end{aligned}$$

Segunda manera de resolver el problema, via una manera directa,

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{10} \frac{1}{p_n q_n} &= \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 11} + \frac{1}{7\cdot 11} + \frac{1}{7\cdot 11} + \frac{1}{7\cdot 11} = \\ &= \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 5} + \frac{2}{5\cdot 7} + \frac{4}{7\cdot 11} = \\ &= \frac{5\cdot 7\cdot 11 + 2(2\cdot 7\cdot 11) + 2(2\cdot 3\cdot 11) + 4(2\cdot 3\cdot 5)}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11} = \\ &= \frac{5\cdot 7\cdot 11 + 2\cdot 2\cdot 11(7+3) + 4\cdot 2\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11} = \frac{5(7\cdot 11 + 2\cdot 2\cdot 11\cdot 2 + 4\cdot 2\cdot 3)}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11} = \\ &= \frac{7\cdot 11 + 2\cdot 2\cdot 11\cdot 2 + 4\cdot 2\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 7\cdot 11} = \frac{7\cdot 11 + 8(11+3)}{2\cdot 3\cdot 7\cdot 11} = \\ &= \frac{7(11 + 8\cdot 2)}{2\cdot 3\cdot 7\cdot 11} = \frac{27}{2\cdot 3\cdot 11} = \frac{9}{22}.\end{aligned}$$