Soluciones del examen de invitación a la OMM, 2017 (versión C)

1. **(e)** Es una cuadrícula de 5×8, así que tiene 40 cuadritos. La mitad deben de ser grises, pero hay 12 grises. Faltan 8.

2. **(e)** *Forma intuitiva.* La diferencia inicial entre niños y niñas es de 6. Cada semana la diferencia disminuye en 1, así que se necesitan 6 semanas.

Forma algebraica. Llamemos s al número de semanas necesarias para que haya el mismo número de niños que de niñas. Después de s semanas habrá $25 + 2s$ niños y $19 + 3s$ niñas, así que la ecuación a resolver es $25 + 2s = 19 + 3s$, de donde $s = 25 - 19 = 6$.

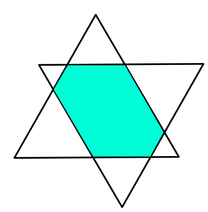
3. **(d)** El número de cubitos que hay hasta el momento es $1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) = 10$. Debería haber $3 \times 3 \times 3 = 27$, así que faltan 17.

4. **(e)** En la tercera semana, cada día corre $4,000$ metros, y cada dos semanas aumenta un kilómetro. Como necesita llegar a 15 kms. le faltan 11 kms. y entonces 22 semanas más de entrenamiento. Luego en la semana 25 estará corriendo cada día 15 kms.

5. **(c)** La primera y la octava se pueden juntar para formar el rectángulo; la segunda se puede completar con una igual a ella y lo mismo ocurre con la sexta. La quinta y la séptima también son complementarias. Sólo la tercera y la cuarta necesitan de dos piezas cada una.

6. **(d)** Las tarjetas que debe voltear son las que tienen número par: 4 y 8 (porque si tuvieran consonante del otro lado, habría dicho mentira), y también la que tiene M (pues es consonante y debe verificar que detrás haya un número impar). Las otras dos tarjetas no se necesitan voltear, atrás de una tarjeta con vocal puede haber un número par o impar sin que eso afecte lo que afirma Pedro.

7. **(b)** Observemos que cada pico de la estrella es un triángulo equilátero. Entonces la suma de tres lados consecutivos del hexágono es igual a lo que mide un lado de los triángulos equiláteros originales, y entonces el perímetro del hexágono es $2/3$ el perímetro de uno de los triángulos, es decir, $12\,\text{cm}$.



8. **(d)** Tenemos que $24 = 2^3 \times 3$, así que las posibilidades para las cifras del número son $(8, 3, 1, 1)$, $(4, 2, 3, 1)$, $(4, 6, 1, 1)$, $(2, 2, 2, 3)$ y $(2, 2, 6, 1)$. Las respectivas sumas son 13, 10, 12, 9 y 11, de manera que son 5 posibilidades.

9. **(e)** Para que el triángulo n esté encima del triángulo 0 debe ocurrir que $100 \cdot n$ sea un múltiplo de 360. El múltiplo más pequeño de 100 y 360 es 1800, así que $n = \frac{1800}{100} = 18$.

10. **(a)** Entre el primer lugar y el último tuvieron 16 votos, así que los otros 3 tuvieron un total de 20 votos. Sabemos que el segundo lugar tuvo menos votos que el primero; si hubiera tenido 10 u 11 votos, los otros dos candidatos habrían sumado 9 o 10 votos pero sabemos que uno de esos números debería ser al menos 5, así que no es posible. Como $8+7+5=20=9+6+5$, entonces es posible que haya tenido cualquiera de 8 o 9 votos.

11. **(c)** Si a es la longitud de la base del rectángulo negro, el área del rectángulo negro es también a. Luego las áreas negra, blanca y gris son a, $b=(a+2)3-a$, $c=(a+4)5-(a+2)3$, respectivamente. Por lo que, $2((a+2)3-a)=a+(a+4)5-(a+2)3$. Así, $4a+12=3a+14$, y entonces $a=2$.

12. **(c)**

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{10}\frac{1}{p_nq_n} &= \frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{7\cdot 11}=\\
&= \frac{1}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\frac{4}{7\cdot 11}=\\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{11}=\frac{9}{22}.
\end{aligned}$$

Segunda manera de resolver el problema, via una manera directa,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{10}\frac{1}{p_nq_n} &= \frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{7\cdot 11}=\\
&= \frac{1}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\frac{4}{7\cdot 11}=\\
&= \frac{5\cdot 7\cdot 11+2(2\cdot 7\cdot 11)+2(2\cdot 3\cdot 11)+4(2\cdot 3\cdot 5)}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11}=\\
&= \frac{5\cdot 7\cdot 11+2\cdot 2\cdot 11(7+3)+4\cdot 2\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11}=\frac{5(7\cdot 11+2\cdot 2\cdot 11\cdot 2+4\cdot 2\cdot 3)}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11}=\\
&= \frac{7\cdot 11+2\cdot 2\cdot 11\cdot 2+4\cdot 2\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 7\cdot 11}=\frac{7\cdot 11+8(11+3)}{2\cdot 3\cdot 7\cdot 11}=\\
&= \frac{7(11+8\cdot 2)}{2\cdot 3\cdot 7\cdot 11}=\frac{27}{2\cdot 3\cdot 11}=\frac{9}{22}.
\end{aligned}$$