TZALOA
Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2015, No. 2

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
México D.F.
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor: Carlos Jacob Rubio Barrios

Impreso: Torre y de la Torre Impresos
Aragón no. 134
Col. Álamos, 03400
México D.F.
Teléfonos: (55) 55-30-14-82 y (55) 55-38-34-53

Esta publicación se imprimió con el apoyo financiero del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt).

CONACYT
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Impreso y hecho en México.
Mayo de 2015.

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2015, Número 2

El principal interés de quienes elaboramos tu revista Tzaloa, es lograr una publicación verdaderamente útil. De esta forma, en cada uno de los números buscamos proveer a nuestros lectores de material e información que puede no ser fácil de encontrar en otros medios. En particular, el *artículo de matemáticas*, que se incluye al inicio de la revista, suele ser elaborado especialmente para nosotros, ofreciendo así material inédito y de gran valor, pues es escrito por destacados miembros de la comunidad olímpica mexicana y sus contenidos son reflejo de una basta experiencia y participación en diversos concursos y certámenes de todos los niveles. En este sentido, el artículo *Contando sucesiones binarias*, escrito por nuestro amigo Pedro David Sánchez Salazar, no es la excepción. A través de sus páginas nuestros lectores encontrarán la manera de plantear y resolver problemas presentados en contextos diversos, pero que tienen en común el poder ser reducidos a una siatución de combinatoria de sucesiones binarias. Tanto por

[1]Vocablo náhuatl cuyo significado en español es *aprender*.

su originalidad, como por su utilidad para el tratamiento de múltiples problemas, estamos seguros de que será un buen aporte para incrementar tus competencias.

De especial interés para todos, en este segundo número del año 2015 incluimos los exámenes de la Competencia Internacional de Matemáticas del año pasado y de la *Romanian Masters of Mathematics* 2015. Cabe mencionar que a este último certamen solo son invitados los países que cada año obtienen los mejores lugares en la olimpiada internacional y ésta es la primera ocasión en que México se ve galardonado con tal distinción.

Por último y como siempre, hemos puesto todo nuestro entusiasmo y esmero en la intergación y conformación de las demás secciones que tradicionalmente integran la revista. Esperamos que los contenidos, problemas, soluciones, exámenes, información olímpica y materiales que hemos escogido, revisado y preparado sean de interés y utilidad para todos nuestros lectores.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

29ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.

- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 29^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1996. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2015-2016 y, para el 1° de julio de 2016, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org`.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 29^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará en el mes de noviembre de 2015 en algún estado de la República Mexicana. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2015 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXVIII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 57^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (Hong Kong, julio de 2016) y a la XXXI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (septiembre de 2016).

De entre los concursantes nacidos en 1999 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XVIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (junio de 2016).

De entre los más jóvenes se seleccionará la delegación mexicana que nos representará en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC).

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la V Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO)[2] a celebrarse en el mes de abril de 2016.

[2]La Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas nace en 2012 como una manera de estimular la participación femenil en olimpiadas de matemáticas, siguiendo el ejemplo de China que ya contaba con una olimpiada exclusiva para mujeres. El modelo de competencia de esta olimpiada es el mismo que el de la IMO, con la diferencia de que las delegaciones nacionales son de cuatro participantes en lugar de seis. A pesar de que la olimpiada es europea, es posible la participación de equipos no europeos por invitación.

Contando sucesiones binarias

Por Pedro David Sánchez Salazar

Nivel Básico

Existen muchos problemas en la Olimpiada, específicamente en combinatoria, que aparentemente son diferentes pero que, desde cierto punto de vista pueden descubrir diferentes relaciones o diferentes formas de usar una misma idea.
Por ejemplo, consideremos el siguiente problema, muy conocido en combinatoria elemental.

Problema 1. *En una bolsa hay* 6 *pelotas azules y* 4 *pelotas rojas, ¿de cuántas formas podemos colocarlas en fila?*

La solución es bien conocida y consiste en colocar los diez espacios que se van a usar, y luego seleccionar cuáles cuatro de ellos tendrán pelotas rojas (y por tanto, el resto tendrán azules). La selección de cuatro de los diez espacios puede hacerse de $\binom{10}{4} = 210$ formas[3], que es la respuesta al problema.

En realidad el hecho de que fueran pelotas rojas y azules es irrelevante, lo único que era de importancia aquí era que había dos tipos de objetos que se colocaban en fila. Para simplificar, nosotros hablaremos en adelante de sucesiones de ceros y unos. Por ejemplo, los ceros representando azul y los unos representando rojo. Así, el arreglo rojo-rojo-azul-rojo... corresponde a la sucesión $0, 0, 1, 0, \ldots$, la cual, por comodidad la representaremos sin espacios como: $0010\ldots$ y a lo que también nos referiremos como una *palabra binaria* de longitud n. Una palabra binaria, a diferencia de un número binario, puede comenzar con 0.

Así, el problema inicial puede plantearse en este contexto como: *Hallar la cantidad de palabras binarias de longitud* 10 *que tienen exactamente* 4 *entradas iguales a* 1.

[3] Ver en el apéndice el teorema 4.

La generalización es inmediata:

Teorema 1. *El número de formas de colocar en fila n objetos que pueden ser de dos tipos, de manera que k sean de un tipo y $n-k$ del otro es $\binom{n}{k}$.*

Y de paso citamos también un resultado muy conocido que se obtiene de la aplicación directa del principio fundamental del conteo.

Teorema 2. *El número de palabras binarias de longitud n (sin restricción en la cantidad de unos o ceros), es igual a 2^n.*

Demostración. Dado que cada palabra se forma con n espacios, y cada espacio tiene dos opciones (puede ser 0 o 1), el número total de palabras es $\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n} = 2^n$.

□

Los problemas que nos van a interesar serán similares, pero con restricciones adicionales. A manera de ejemplo, consideremos el siguiente problema.

Problema 2. *¿Cuántas sucesiones binarias de longitud diez, con cuatro posiciones 1, no tienen dos 1 en posición consecutiva?*

De manera más informal: ¿cuántas palabras binarias de longitud 10 y con 4 unos no contienen 11?

Por ejemplo: 1001010001 no tiene unos consecutivos, mientras que 1001110000 tiene unos consecutivos en las posiciones 4 y 5 así como en las posiciones 5 y 6.
Antes de resolverlo, señalamos que este problema es muy común y aparece en una gran variedad de contextos. Por ejemplo, un enunciado típico sería:

¿De cuántas formas se pueden acomodar en fila a 4 niñas y 6 niños de manera que no haya 2 niñas juntas?

En este caso, las niñas corresponden a 1 y los niños a 0, cada forma de acomodar a los niños y niñas corresponde a una palabra binaria de longitud 10, y cada palabra corresponde a su vez a una forma de acomodar a todos los niños (niños y niñas).
Este problema se resuelve por la "estrategia de los separadores". Dado que los ceros "separan" a los unos, colocamos primero todos los ceros y luego seleccionamos algunos de los espacios entre ellos para colocar los unos.
Así, como tenemos 6 ceros la configuración inicial es:

$$\_\,0\,\_\,0\,\_\,0\,\_\,0\,\_\,0\,\_\,0\,\_$$

Observa que hay siete espacios, puesto que podríamos poner 1 también por "afuera" de los ceros. Cada vez que seleccionemos cuatro espacios (indicados por asteriscos en los ejemplos que siguen), obtenemos una sucesión binaria con 4 unos en donde no hay unos consecutivos.

Ejemplos:

$$\texttt{\_}\,0\,\underline{*}\,0\,\texttt{\_}\,0\,\underline{*}\,0\,\underline{*}\,0\,\texttt{\_}\,0\,\underline{*} \to \texttt{0100101001}$$
$$\underline{*}\,0\,\texttt{\_}\,0\,\texttt{\_}\,0\,\underline{*}\,0\,\texttt{\_}\,0\,\underline{*}\,0\,\underline{*} \to \texttt{1000100101}$$

Pero no sólo cada elección corresponde a una palabra binaria que no contenga 11, sino cada palabra que no contiene 11 corresponde a una elección de cuatro espacios. Por tanto, debe haber la misma cantidad de elecciones que de palabras binarias sin 11.
Dado que hay siete espacios y se escogen cuatro de ellos, el número de elecciones es $\binom{7}{4} = 35$, y por tanto, hay 35 sucesiones binarias de longitud 10 en donde no aparecen dos unos consecutivos con cuatro unos.
El argumento se puede usar para demostrar el siguiente resultado general.

Teorema 3. *El número de palabras binarias formadas por m ceros y n unos, de manera que no haya dos unos consecutivos es $\binom{m+1}{n}$.*

Vamos a variar un poco el enunciado del problema anterior para obtener uno nuevo.

Problema 3. *¿Cuántas palabras binarias de longitud 10 no tienen dos unos consecutivos?*

Hacemos notar que la diferencia es que ahora la cantidad de unos (o ceros) no está dada sino que puede ser cualquier valor.

Una estrategia muy común cuando se pide calcular una cantidad en un problema, es intentar el problema con algunos casos más pequeños para tratar de hallar alguna regla o patrón que nos permita resolver el problema original. Por ello, procedemos a analizar el problema con sucesiones de menor longitud.

- Si $n = 1$, hay 2 posibilidades: 0, 1.
- Si $n = 2$, hay 3 posibilidades: 00, 01, 10.
- Si $n = 3$, hay 5 posibilidades: $000, 001, 010, 100, 101$.
- Si $n = 4$, hay 8 posibilidades: $0000, 0001, 0010, 0100, 0101, 1000, 1001, 1010$.
- Si $n = 5$, hay 13 posibilidades: 00000, 00001, 00010, 00100, 00101, 01000, 01001, 01010, 10000, 10001, 10010, 10100, 10101.

Al parecer, el número de formas para cierta longitud n lo podemos hallar sumando el número de formas para $n - 1$ y $n - 2$. Continuando el patrón:

$$2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

obtenemos como respuesta 144. Sin embargo, sabemos que existe la posibilidad de que el patrón sea aparente, que en realidad no continúa siempre de la misma forma. Necesitamos una justificación.

Denotemos por c_n al número de sucesiones binarias de longitud n que no tienen dos unos consecutivos. Así, por ejemplo, $c_1 = 2, c_2 = 3$ y $c_3 = 5$.

Ahora, hay dos casos dependiendo de si la sucesión inicia con 0 o inicia con 1.

- Cuando la sucesión inicia con cero, es de la forma

  $$\mathtt{0}\,\_\,\_\,\_\,\ldots\,\_$$

  donde falta por llenar $n-1$ posiciones, lo cual por definición puede hacerse de c_{n-1} formas.

- Cuando inicia con uno, la segunda posición queda obligada a ser cero, por lo que debe tener la forma

  $$\mathtt{1}\,\mathtt{0}\,\_\,\_\,\_\,\ldots\,\_$$

  donde falta por llenar $n-2$ espacios y que, por definición, puede hacerse de c_{n-2} formas.

Por lo tanto,

$$c_n = c_{n-1} + c_{n-2}, \qquad (n > 2) \tag{1}$$

con lo cual queda probado que el patrón efectivamente continúa y la respuesta sí es 144.

Ahora, lo más seguro es que hayas notado que la recurrencia (1) es similar a la de Fibonacci, o incluso reconociste la serie de números que escribimos arriba. Sin embargo sería un error decir que el número de palabras binarias de longitud n sin dos unos consecutivos es el n-ésimo número de Fibonacci.

Recordemos que los números de Fibonacci están definidos por la relación

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad (n > 1) \tag{2}$$

con las condiciones iniciales $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$, por lo que tenemos $F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5$, etcétera. De esta forma, el resultado general para este problema es el siguiente:

Teorema 4. *El número c_n de palabras binarias de longitud n en donde no aparecen dos unos consecutivos es igual al $(n+2)$-ésimo número de Fibonacci, esto es, $c_n = F_{n+2}$.*

En este punto hacemos una pausa para mencionar brevemente una conexión de los problemas anteriores con problemas de acomodos.

Problema 4. *Determinar el número d_n de formas en que una cuadrícula de $2 \times n$ puede ser cubierta completamente con n dominós (piezas de 1×2) sin traslapes.*

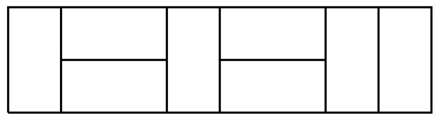


Figura 1: Cubierta de una cuadrícula de 2×8 con 8 dominós.

Por ejemplo, la Figura 1 muestra una forma de acomodar 8 dominós para cubrir una cuadrícula de 2×8.
A primera vista, este problema no parece tener relación con acomodar niños y niñas, o unos y ceros. Sin embargo, notemos que al escribir una palabra binaria sin unos consecutivos, cada vez que aparece 1 en medio de la palabra, necesariamente debe ocurrir 0 en la siguiente posición, por lo que el 10 "funciona" como un bloque. Ilustremos esto con unos ejemplos:

$$\begin{aligned} 0100010100 &= [0][10][0][0][10][10][0] \\ 1001000100 &= [10][0][10][0][0][10][0] \end{aligned}$$

Ahora, observemos que los "bloques" que sólo constan de un cero ocupan una posición, pero los que constan de 10 ocupan dos posiciones. Esta es la clave para hacer la correspondencia entre palabras binarias y arreglos: cuando aparece un cero ponemos un dominó vertical (ocupando una columna) y cuando aparezca 10 ponemos dominós horizontales.

De este modo, el acomodo en la Figura 1 corresponde a la palabra binaria

$$[0][10][0][10][0][0] = 01001000.$$

Si d_n es el número de formas de acomodar los dominós en una cuadrícula de $2 \times n$, la Figura 2 es una ilustración de por qué se cumple la recurrencia correspondiente:

$$d_n = d_{n-1} + d_{n-2}.$$

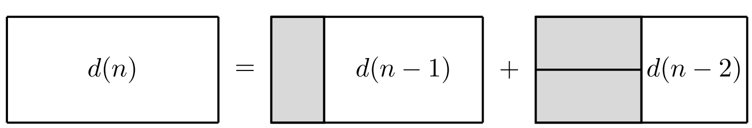


Figura 2: Obtención de la recurrencia tipo Fibonacci para acomodos de dominós.

Es natural preguntar qué pasaría si aparece 1 al final de la palabra, pues no es posible colocar un dominó horizontal en la última columna. Lo que sucede es que $d_1 = 1$,

$d_2 = 2$, por lo que d_n vuelve a ser la sucesión c_n pero recorrida, es decir, $d_n = c_{n-1}$. Combinando este último resultado con el teorema 4 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 5. *El número de formas d_n en que se puede cubrir una cuadrícula de $2 \times n$ con n dominós es igual al $(n+1)$-ésimo número de Fibonacci, esto es, $d_n = F_{n+1}$.*

Regresando a palabras binarias, recordemos el siguiente resultado sobre combinaciones:

Teorema 6. *Para todo número entero $n \geq 0$ se cumple:*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Vamos a dar una prueba con la idea de las palabras binarias. Por el teorema 2 sabemos que el lado derecho de la identidad está contando la cantidad de palabras binarias de longitud n (sin importar la cantidad de unos).

Por otro lado el teorema 1 nos dice que $\binom{n}{k}$ está contando el número de palabras binarias de longitud n que tienen exactamente k unos.

Concluimos la prueba notando entonces que el lado derecho de la identidad está realizando el mismo conteo que el lado derecho (palabras binarias de longitud n), pero dividiéndolo por casos dependiendo de cuántos unos tiene la palabra: $\binom{n}{0}$ es el número de palabras sin unos, $\binom{n}{1}$ es el número de palabras con sólo un 1, $\binom{n}{2}$ es el número de palabras con dos posiciones iguales a 1 y así sucesivamente.

Sabemos que el teorema anterior lo que nos está diciendo es que la suma de los números en la n-ésima fila en el triángulo de Pascal es igual a 2^n. Nos preguntamos si existe un teorema similar en el caso con restricciones.
Para ello, vamos a reescribir el teorema 3 como sigue, observando que si una palabra tiene longitud n y k unos, entonces tendrá $n - k$ ceros.

Teorema 7. *El número de palabras binarias de longitud n que contienen k unos pero sin que aparezcan unos consecutivos es $\binom{n+1-k}{k}$.*

Ahora, supongamos que queremos contar todas las palabras binarias de longitud n que no contienen 11, dependiendo de la cantidad de unos que tengan.

- Cuando no hay unos, hay $\binom{n+1}{0}$ palabras.
- Cuando hay un uno, hay $\binom{n+1-1}{1} = \binom{n}{1}$ palabras.
- Cuando hay 2 unos, hay $\binom{n+1-2}{2} = \binom{n-1}{2}$ palabras.
- Cuando hay 3 unos, hay $\binom{n+1-3}{3} = \binom{n-2}{3}$ palabras.

Y así sucesivamente.

Pero sabemos por el teorema 4 que la cantidad total de palabras binarias restringidas de longitud n es igual a F_{n+2}. Obtenemos entonces la siguiente identidad (donde se toman tantos sumandos del lado izquierdo como sea posible):

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{3} + \cdots = F_{n+2}$$

que se puede expresar de manera un poco más estética haciendo el cambio $m = n + 1$.

Teorema 8. *Para todo entero $m > 0$ se cumple:*

$$\binom{m}{0} + \binom{m-1}{1} + \binom{m-2}{2} + \cdots + \binom{m-k}{k} + \cdots = F_{m+1}$$

donde F_m es el m-ésimo número de Fibonacci.

Pero no sólo obtenemos una fórmula algebraica, también obtenemos un resultado sobre sumas en el triángulo de Pascal.

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \quad 8 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \qquad 34 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1
\end{array}$$

Figura 3: Sumas en el triángulo de Pascal

Observemos que si sumamos las entradas "por diagonales" del triángulo de Pascal como indica la figura 3, obtenemos siempre un número de Fibonacci, puesto que las entradas que estamos sumando son precisamente las que aparecen en el teorema 8.

Problemas

1. ¿De cuántas formas puedes descomponer n como sumas de 1 y 2? (El orden importa: por ejemplo, hay 3 formas de descomponer $n = 3$: $1+1+1$, $1+2$, $2+1$).

2. ¿De cuántas formas puedes descomponer n como suma de números impares? (El orden importa).

3. Una ranita quiere subir una escalera de 20 escalones. Si en cada brinco sube 2 o 3 escalones, ¿de cuántas formas puede la ranita subir la escalera y caer exactamente en el escalón 20? (Es decir, si está en el escalón 18, a fuerza tiene que dar un brinco de 2 escalones para terminar).

4. Un domador de leones quiere colocar 5 leones y 4 tigres en fila, de manera que ningún tigre quede junto a otro tigre. ¿De cuántas formas puede hacerlo?

5. ¿De cuántas formas puede hacer el domador un arreglo de 9 animales salvajes (leones o tigres) de tal manera que no haya dos tigres juntos, pero puede usar cualquier cantidad de tigres o leones?

6. ¿Cuántos subconjuntos tiene $\{1, 2, \ldots, n\}$ donde no haya elementos consecutivos?

7. Demuestra que el número de palabras binarias de tamaño n con un número impar de unos es igual al número de palabras binarias de tamaño n con un número par de unos.

8. Demuestra que si F_n es el n-ésimo número de Fibonacci, entonces
$$F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

9. Demuestra que si F_n es el n-ésimo número de Fibonacci, entonces
$$F_0 + F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1}.$$

10. Demuestra que si F_n es el n-ésimo número de Fibonacci, entonces
$$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n} - 1.$$

11. Sea a_n el número de palabras binarias de longitud n en las que no aparecen los bloques 101 ni 111. Determina a_{16}.

Bibliografía

1. Benjamin, T. Arthur; Quinn, Jennifer J. *Proofs that Really Count – The Art of Combinatorial Proof.* The Mathematical Association of America. Dolciani Mathematical Expositions 27, 2003.

2. Herman Jiri; Kucera, Radan; Simsa, Jaromir. *Counting and Configurations – Problems in Combinatorics, Arithmetic and Geometry.* Canadian Mathematical Society (2000).

Problemas de práctica

A continuación presentamos los 20 problemas de práctica seleccionados especialmente para este segundo número del año 2015. Como seguramente ya habrás observado, el nivel de dificultad de los problemas que contiene esta sección varía conforme va transcurriendo el año. Es así, que el material seleccionado para el primer número es en su mayoría de nivel principiante y a partir de ahí, paulatimamente se incrementa el nivel, de manera que la selección para el cuarto (último) número del año es la que incorpora la mayor proporción de problemas avanzados. De cualquier manera, en todos los números siempre buscamos que la selección sea diversa, que incluya retos interesantes y a la medida de todos.

Por último, te invitamos a que con tu participación contribuyas a enriquecer esta sección de la revista. Estamos seguros que conoces problemas interesantes que quieres compartir y por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus propuestas.

Problema 1. Luis hace una lista, de menor a mayor, de todos los enteros positivos que dividen al número 110110011. ¿Cuáles son los primeros tres números de esa lista?

Problema 2. Un número se llama *rechoncho* si tiene exactamente dos dígitos y la suma de ellos equivale a una cuarta parte del número. Por ejemplo, el número 24 es rechoncho ya que $2 + 4 = 6 = \frac{24}{4}$. ¿Cuánto vale la suma de todos los números rechonchos?

Problema 3. Se tienen cuatro pipas de agua y una piscina. La primera y la segunda pipa trabajando juntas llenan la piscina en 2 horas. La segunda y la tercera pipa trabajando juntas la llenan en 3 horas. La tercera y la cuarta pipa trabajando juntas la llenan en 4 horas. ¿Cuánto tiempo tardan en llenar la piscina la primera y la cuarta pipa trabajando juntas?

Problema 4. En una isla hay 2015 habitantes. Cada uno de ellos siempre dice la verdad o siempre miente. Si a cada habitante se le pregunta *¿cuántos mentirosos hay en la isla?* y las respuestas son $1, 2, 3, \ldots, 2014, 2015$, ¿cuántos mentirosos hay en la isla?

Problema 5. Un entero positivo de cuatro dígitos se llama *ajustado* si tanto su mitad como su doble también son enteros de cuatro dígitos. ¿Cuántos números ajustados hay?

Problema 6. Sea ABC un triángulo con ángulo recto en B y sea P un punto sobre su circuncírculo. Sean X e Y los pies de las perpendiculaes de P a los lados AB y AC. Demuestra que XY pasa por el punto medio de BP.

Problema 7. Encuentra todos los enteros que se pueden escribir de la forma $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ con a y b enteros.

Problema 8. Halla el menor entero positivo n que cumple que la fracción $\frac{100!}{50^n}$ no es un número entero. (100! denota el producto de todos los enteros del 1 al 100.)

Problema 9. Sean a, b y c números reales positivos tales que $abc = 1$ y $a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Demuestra que para cada entero positivo n, $a^n + b^n + c^n > \frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n}$.

Problema 10. ¿De cuántas maneras se puede escribir un entero n como suma de al menos dos enteros positivos donde sí importa el orden? (Por ejemplo, $(n-1)+1$ y $1+(n-1)$ son dos formas distintas si $n > 2$).

Problema 11. Sean ABC y DEF triángulos rectángulos semejantes con hipotenusas $AC = 2$ y $DF = 10$, respectivamente. Calcula el valor de $AB \cdot DE + BC \cdot EF$.

Problema 12. Demuestra que para cualquier entero positivo n el número

$$\left(\tfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \left(\tfrac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$$

es un entero positivo impar.

Problema 13. Sean a, b, c, d enteros positivos tales que $a+b+c+d = 63$. Determina el máximo valor de $ab + bc + cd$.

Problema 14. Demuestra que si coloreamos cada número entre el 1 y el 9, inclusive, de rojo o azul, existirán tres números en progresión aritmética pintados del mismo color.

Problema 15. Sea $ABCDE$ un pentágono cíclico tal que $AB = BC$ y $CD = DE$. Sean P el punto de intersección de AD y BE; Q el punto de intersección de AC y BD; y R el punto de intersección de BD y CE. Demuestra que el triángulo PQR es isósceles.

Problema 16. Para cierto entero positivo M, consideramos el conjunto de números $\{M^2+1, M^2+2, \ldots, M^2+2M\}$. Demuestra que los productos ab, con a y b números en este conjunto, son todos diferentes.

Problema 17. Sean a, b y c enteros positivos tales que $b = a^2 - a$, $c = b^2 - b$ y $a = c^2 - c$. Demuestra que $a = b = c = 2$.

Problema 18. Demuestra que no existen enteros positivos x, y, z con $z > 1$ tales que $(x+1)^2 + (x+2)^2 + \cdots + (x+99)^2 = y^z$.

Problema 19. La suma de 1999 enteros positivos es 2015. De entre todas las posibilidades, ¿cuál es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de la suma de sus cuadrados?

Problema 20. Sea n un entero positivo y sea X un conjunto con $n+2$ enteros, cada uno de ellos con valor absoluto menor o igual que n. Demuestra que existen tres números distintos a, b, c en X tales que $a + b = c$.

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección podrás encontrar las soluciones de los 20 problemas de la sección anterior. Sin embargo, no te recomendamos consultarla antes de tener tu propia respuesta o por lo menos no sin haberle dedicado bastante tiempo a cada problema. Ten en cuenta que la clave para mejorar tus capacidades está en la perseverancia y el esfuerzo.

Cabe aclarar que las soluciones que aquí se presentan no son necesariamente las únicas o las mejores, tan sólo son ejemplos que muestran el tipo de razonamiento que busca estimular la olimpiada. En matemáticas, cada problema puede tener tantas soluciones correctas como ideas originales se desarrollen con creatividad y lógica. Si tú encontraste una solución diferente de las que aquí se presentan y no estás seguro de su validez o simplemente quieres compartirla con nosotros, te invitamos para que nos escribas a `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. Ciertamente el primer número es 1. El número no es divisible por 2 pero sí es divisible por 3 ya que la suma de sus dígitos es 6. No es divisible por 5 y una división muestra que tampoco lo es por 7. No es divisible por 9 ya que la suma de sus dígitos no es múltiplo de 9, pero sí es divisible entre 11 ya que $110110011 = 11(1001001)$. Por lo tanto, los primeros tres números de la lista son 1, 3 y 11.

Solución del problema 2. Supongamos que $n = 10a + b$ es rechoncho, donde a y b son los dígitos de n. Entonces se debe cumplir que $4(a + b) = 10a + b$ y por tanto $6a = 3b$. De aquí, $2a = b$ por lo que la cifra de las unidades debe ser igual al doble de la cifra de las decenas para que el número sea rechoncho. Por lo tanto, los números rechonchos son 12, 24, 36 y 48, cuya suma es igual a 120.

Solución del problema 3. Sean a, b, c y d las porciones de la piscina que cada pipa llena por hora, respectivamente (a corresponde a la primera pipa). Como la primera y la segunda pipa llenan $\frac{1}{2}$ de la piscina por hora, tenemos que $a + b = \frac{1}{2}$. De manera

análoga, tenemos que $b+c=\frac{1}{3}$ y $c+d=\frac{1}{4}$.
Ahora, tenemos que

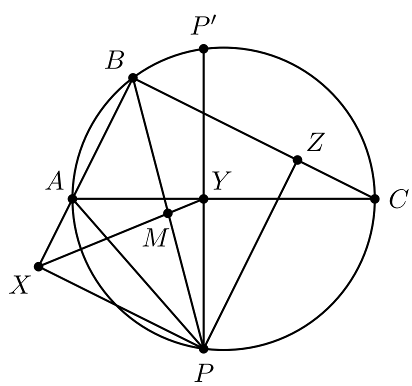
$$a+d=(a+b)+(c+d)-(b+c)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}.$$

Luego, la primera y la cuarta pipa trabajando juntas llenan $\frac{5}{12}$ de la piscina por hora. Por lo tanto, ambas pipas la llenan completamente en $\frac{12}{5}$ horas, esto es, en 2 horas y 24 minutos.

Solución del problema 4. Notemos que si alguien dice la verdad y dice que hay n mentirosos, entonces $2015-n$ deben decir siempre la verdad. Por lo tanto, cuando se les pregunta a estos $2015-n$ habitantes cuántos mentirosos hay, todos dirán la verdad y todas sus respuestas serán iguales. Sin embargo no hay dos personas que hayan respondido igual. Entonces a lo más hay una persona que dijo la verdad, justo la persona que dice que hay 2014 mentirosos es la que dice la verdad. Por lo tanto, hay 2014 mentirosos.

Solución del problema 5. Si n es un número ajustado, debe cumplir que $1000\leq\frac{n}{2}$ y por tanto $2000\leq n$. Además, debe suceder que $2n<10000$ y por tanto $n<5000$. Entonces $2000\leq n<5000$.
Por otra parte, notemos que además n debe ser par, para que su mitad sea un número entero de cuatro dígitos, por lo que sólo nos interesan los números pares en el rango mencionado y por tanto hay $\frac{3000}{2}=1500$ números ajustados.

Solución del problema 6. Sean P' la reflexión del punto P sobre el diámetro AC y M la intersección de BP con XY.



Como $\angle PXA=\angle AYP=90^\circ$, el cuadrilátero $AXPY$ es cíclico, esto es, $\angle AXY=\angle APY$. Como el ángulo $\angle APY$ vale la mitad del arco $\widehat{AP'}$, que es igual al arco $\widehat{AP}$, tenemos que $\angle APY=\angle ABP$. Por lo tanto, $\angle BXM=\angle MBX$ y el triángulo BMX es isósceles. Luego, M está en la mediatriz de BX y en la hipotenusa BP. Como en un triángulo rectángulo el punto medio de la hipotenusa es el circuncentro, concluimos que M es el circuncentro del triángulo BXP, por lo que M es el punto medio de BP.

Solución alternativa. Sea Z el pie de la perpendicular de P al lado BC. Por el teorema de Simson[4], los puntos X, Y e Z están alineados. Y como los ángulos $\angle PXB$, $\angle XBZ$ y $\angle BZP$ son rectos, el cuadrilátero $BXPZ$ es un rectángulo. Luego, la diagonal XZ (que es la misma recta que XY) biseca a la otra diagonal BP.

Solución del problema 7. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que a y b son primos relativos. Si $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = k$ con k entero podemos reescribir esta expresión como $a^2 + b^2 = kab$. Luego, como a divide a a^2 y a kab se tiene que a divide a b^2, pero estos números son primos relativos, entonces $a = 1$ o $a = -1$. Análogamente $b = 1$ o $b = -1$. Por lo tanto, los únicos números enteros que se pueden escribir de esa forma son $k = 2$ y $k = -2$.

Solución del problema 8. Nos interesa considerar únicamente la cantidad de factores 2 y 5 en el numerador y el denominador, ya que tan pronto haya más factores 2 o factores 5 en el denominador que en el numerador, la fracción ya no será igual a un número entero.
Por otro lado, $50^n = 2^n 5^{2n}$ y como los factores iguales a 5 son más escasos que los factores 2 en el numerador, los que primero se acabarán al aumentar n son los factores 5.
Como $100!$ contiene $\frac{100}{5} + \frac{100}{5^2} = 20+4$ factores 5 (pues $100!$ contiene $\frac{100}{5}$ múltiplos de 5 y $\frac{100}{5^2}$ múltiplos de 25), necesitamos que en el denominador haya más de 24 factores 5. Pero como cada 50 aporta dos factores, esto sucederá cuando $n = 13$, por lo que la respuesta es 13.

Solución del problema 9. Usando la relación $abc = 1$ podemos escribir la condición inicial en la forma $a + b + c > bc + ca + ab$ o bien $-bc - ca - ab + a + b + c > 0$. Sumando $abc - 1$ $(= 0)$ al lado izquierdo de esta desigualdad obtenemos

$$abc - bc - ca - ab + a + b + c - 1 > 0$$

que se factoriza como

$$(a - 1)(b - 1)(c - 1) > 0. \tag{3}$$

De manera similar, usando la relación $a^n b^n c^n = 1$, podemos escribir la desigualdad a demostrar en la forma

$$(a^n - 1)(b^n - 1)(c^n - 1) > 0. \tag{4}$$

Sin embargo, para cualquier número real positivo x los números $x - 1$ y $x^n - 1$ son ambos positivos, ambos negativos, o ambos cero. En consecuencia las desigualdades (3) y (4) son equivalentes.

Solución del problema 10. Consideremos n unos con un espacio entre unos consecutivos. Una suma donde importa el orden es escoger algunos de los $n - 1$ espacios y

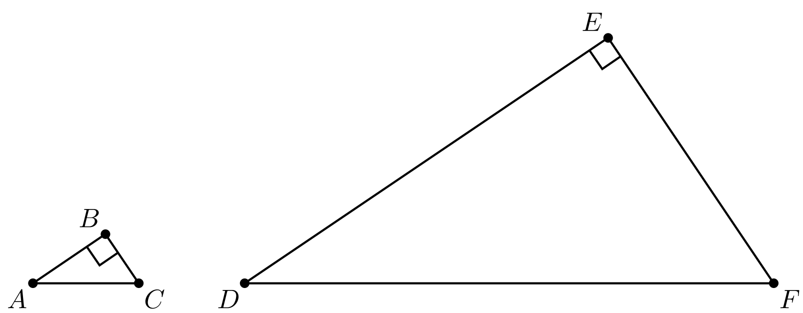
[4] Ver en el apéndice el teorema 20.

poner signos $+$. Entonces si se escribe como suma de dos números hay $\binom{n-1}{1}$ formas, como suma de tres hay $\binom{n-1}{1}$ formas, y así sucesivamente hasta como suma de $n > 1$ números de las cuales hay $\binom{n-1}{n-1}$ formas. Entonces, el número buscado es

$$\begin{aligned}
& \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \cdots + \binom{n-1}{n-1} \\
= \; & \left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \cdots + \binom{n-1}{n-1}\right] - \binom{n-1}{0} \\
= \; & 2^{n-1} - 1
\end{aligned}$$

puesto que $2^{n-1} = (1+1)^{n-1} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \cdots + \binom{n-1}{n-1}$ por el teorema del binomio[5].

Solución del problema 11. La razón de semejanza entre los triángulos ABC y DEF es $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. Luego, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{1}{5}$, de donde $DE = 5AB$ y $EF = 5BC$.



Por lo tanto, aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC, obtenemos

$$AB \cdot DE + BC \cdot EF = 5(AB^2 + BC^2) = 5(2^2) = 20.$$

Solución del problema 12. Sean $\alpha = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ y $\beta = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$. Haremos inducción en n. Para $n = 1$ y 2 se tiene que

$$\alpha + \beta = \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^1 + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^1 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$$

y

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{9 + 6\sqrt{17} + 17}{4} + \frac{9 - 6\sqrt{17} + 17}{4} = \frac{52}{4} = 13.$$

Supongamos que el resultado es cierto para $n = k$. Si $n = k + 1$ tenemos que

$$\alpha^{k+1} + \beta^{k+1} = (\alpha^k + \beta^k)(\alpha + \beta) - \alpha\beta(\alpha^{k-1} + \beta^{k-1})$$

[5] Ver en el apéndice el teorema 5.

y $\alpha\beta = (\frac{3+\sqrt{17}}{2})(\frac{3-\sqrt{17}}{2}) = \frac{3^2-17}{4} = -2$. Entonces por hipótesis de inducción, $\alpha^{k+1} + \beta^{k+1}$ es un número impar menos un número par, por lo tanto también es un número entero impar.

Solución del problema 13. Para cualesquiera números reales positivos x, y tenemos que $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$ por la desigualdad media aritmética - media geométrica.
Haciendo $x = a + c$, $y = b + d$ obtenemos $(a + c)(b + d) \leq \frac{(a+b+c+d)^2}{4}$, de donde $ab + bc + cd + da \leq \frac{63^2}{4} = \frac{3969}{4} = 992.25$.
Como a, b, c y d son enteros positivos, la desigualdad anterior puede escribirse como $ab + bc + cd + da \leq 992$. Por lo tanto, $ab + bc + cd \leq 992 - da \leq 991$ (pues $a \geq 1$ y $d \geq 1$ implican que $da \geq 1$ y por lo tanto $-da \leq -1$). Para concluir que 991 es el máximo buscado, sólo resta mostrar que podemos obtener el valor 991. Supongamos que $ab + bc + cd = 991$ y $a = d = 1$. Entonces $(1 + b)(1 + c) = 992 = 2^5 \times 31$. De aquí, $b = 30$ y $c = 31$ es una solución. Por lo tanto, el valor máximo de $ab + bc + cd$ es 991.

Solución del problema 14. Supongamos que no es cierto y consideramos una manera de pintarlos que no cumpla el problema. Sean $c_1, c_2, \ldots, c_9$ los colores de los nueve números. Por (x, y, z) denotaremos "x, y e z forman una progresión aritmética".
Por el principio de las casillas habrá un color que fue usado al menos 5 veces. Así, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que los $c_{i_1} = c_{i_2} = c_{i_3} = c_{i_4} = c_{i_5} = r$ con $i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < i_5$ son los primeros cinco números coloreados de rojo.
Como i_1, i_2 e i_3 no forman una progresión aritmética, se tiene que $i_3 - i_2 \neq i_2 - i_1$, por lo que $i_3 - i_1 = (i_3 - i_2) + (i_2 - i_1) \geq 2 + 1 = 3$. Análogamente $i_5 - i_3 \geq 3$. Pero tampoco i_1, i_3 e i_5 pueden formar una progresión artimética, por lo que $i_5 - i_3 \neq i_3 - i_1$ y $i_5 - i_1 = (i_5 - i_3) + (i_3 - i_1) \geq 4 + 3 = 7$. Luego, las únicas opciones para (i_1, i_5) son $(1, 8)$, $(1, 9)$ o $(2, 8)$. Veamos cada caso.

- $i_1 = 1$, $i_5 = 8$. Para que esto suceda, se tiene que tener que $i_3 = 4$ o 5. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $i_3 = 4$ (pues en este caso no usaremos al número 9). Como $(1, 4, 7)$ y $(4, 6, 8)$, c_7 y c_6 no pueden ser rojos, por lo que $i_4 = 5$. Pero como $(2, 5, 8)$ y $(1, 3, 5)$, los números 2 y 3 tienen que ser azules e i_2 se quedó sin valor. Esto es una contradicción.

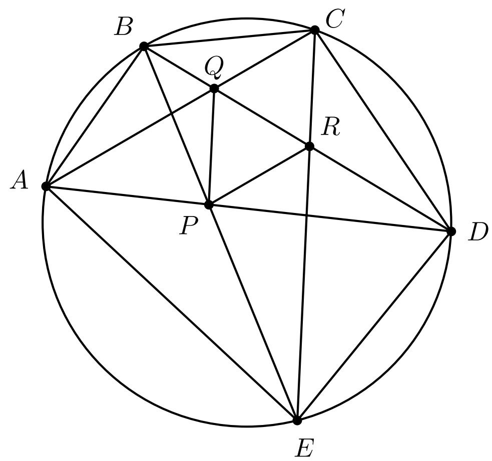
- $i_1 = 1$, $i_5 = 9$. Para que esto suceda, se tiene que dar que $i_3 = 4$, 5 o 6. Pero como $(1, 5, 9)$, solo puede ser 4 o 6 y sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $i_3 = 4$. Como $(1, 4, 7)$, i_4 no puede ser 7 e $i_2 = 2$ o 3. Como $(2, 4, 6)$ y $(3, 6, 9)$, si $i_4 = 6$, llegaríamos a una contradicción tomando una de estas dos ternas. Luego, $i_4 \neq 6$, por lo que $i_4 = 8$. Pero en este caso, c_5, c_6 y c_7 serían azules, lo cual es una contradicción.

- $i_1 = 2$, $1_5 = 9$. Se resuelve igual que el primer caso, pues solamente usamos los números entre i_1 e i_5.

Luego, podemos concluir que siempre existirán tres términos en progresión aritmética pintados del mismo color.

Solución del problema 15. Observemos que

$$\angle APB = \frac{\widehat{AB} + \widehat{DE}}{2} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2} = \angle AQB.$$



Esto significa que el cuadrilátero $ABQP$ es cíclico. Por simetría, el cuadrilátero $EDRP$ también es cíclico. Luego,

$$\angle PQR = 180^\circ - \angle PQB = \angle BAD = \angle BED = 180^\circ - \angle PRD = \angle PRQ,$$

de donde se sigue que el triángulo PQR es isósceles.

Solución del problema 16. Supongamos que no es cierto. Es decir, que existen enteros a, b, c y d del conjunto con $ab = cd$ (y la pareja (a, b) es diferente a la pareja (c, d)). Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a < c$ y $a < d$.
Sea m el máximo común divisor de a y c, de manera que $a = mx$ y $c = my$ para ciertos enteros positivos x e y primos relativos. Como x divide a $\frac{ab}{m} = \frac{cd}{m} = yd$ y $(x, y) = 1$, tenemos que x divide a d. Sea $d = xw$ para cierto entero positivo w. Sustituyendo en $ab = cd$ tenemos que $(mx)b = (my)(xw)$, de donde $b = yw$. En resumen, existen enteros positivos x, y y w tales que

$$a = mx, \quad b = yw, \quad c = ym \text{ y } \ d = xw.$$

Como $my = c > a = mx$, se tiene que $y > x$, por lo que $y \geq x + 1$. De manera similar, $xw = d > mx$ implica que $w > m$, por lo que $w \geq m + 1$. Luego,

$$\begin{aligned} b = yw &\geq (x+1)(m+1) = xm + x + m + 1 \geq xm + 2\sqrt{xm} + 1 \\ &= a + 2\sqrt{a} + 1 \geq M^2 + 2M + 1 = (M+1)^2, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción (aquí usamos la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica para ver que $x + m \geq 2\sqrt{xm}$). Por lo tanto, todos los productos son diferentes.

Solución del problema 17. Si $a = 1$, obtenemos $b = 0$ que no es positivo. Claramente $a = b = c = 2$ satisfacen las tres ecuaciones. Luego, basta demostrar que a no puede ser mayor que 2 (de esta manera, tendríamos que $a = 2$ y por lo tanto $b = c = 2$). Supongamos que $a > 2$. Entonces, $b = a^2 - a = a(a-1) > a(2-1) = a$.
Así, $b > a$; en particular $b > 2$. Aplicando el mismo argumento a la segunda ecuación obtenemos que $c > b$ y por lo tanto $c > 2$. Finalmente, aplicando el mismo argumento a la tercera ecuación obtenemos que $a > c$. Por lo tanto, tenemos que $a > c > b > a$ lo que es una contradicción.

Solución del problema 18. Supongamos que sí existen dichos enteros. Tenemos que

$$\begin{aligned} y^z &= (x+1)^2 + (x+2)^2 + \cdots + (x+99)^2 \\ &= 99x^2 + 2(1+2+\cdots+99)x + (1^2+2^2+\cdots+99^2) \\ &= 99x^2 + 2\left(\frac{99\cdot 100}{2}\right)x + \frac{99\cdot 100\cdot 199}{6} \\ &= 33(3x^2 + 300x + 9950). \end{aligned}$$

De aquí obtenemos que 3 divide a y^z y como 3 es primo, 3 debe de dividir a y. Como $z \geq 2$, tenemos que 3^2 divide a $33(3x^2 + 300x + 9950)$, por lo que 3 divide a $3x^2 + 300x + 9950$ lo cual es una contradicción, pues 9950 no es múltiplo de 3.

Solución del problema 19. Si dos de los números a y b satisfacen $2 \leq b \leq a$, podemos reemplazarlos por $b - 1$ y $a + 1$ sin cambiar su suma.
Como $a \geq b$, tenemos que $(a+1)^2 + (b-1)^2 - (a^2+b^2) = 2a - 2b + 2 > 0$, de modo que la suma de sus cuadrados ha aumentado. Se sigue que el valor máximo se obtiene cuando todos excepto uno de los números son iguales a 1. En este caso, tenemos 1998 unos y el otro número es $2015 - 1998 = 17$. La suma de sus cuadrados es igual a $1998 + 17^2 = 2287$.
Si dos de los números a y b satisfacen $a - b \geq 2$, podemos reemplazarlos por $a - 1$ y $b + 1$ sin cambiar su suma. Como $a^2 + b^2 - (a-1)^2 - (b+1)^2 = 2a - 2b - 2 > 0$, la suma de sus cuadrados ha disminuido. Se sigue que el valor mínimo se obtiene cuando todos los números son 1's y 2's. Es fácil ver que en este caso hay 1983 unos y 16 doses. La suma de sus cuadrados es igual a $1983 + 16 \cdot 4 = 2047$.
Por lo tanto, la diferencia buscada es $2287 - 2047 = 240$.

Solución del problema 20. Lo demostraremos por inducción en n. Para $n = 1$, la única opción para X es el conjunto $\{-1, 0, 1\}$ y estos números cumplen que $(-1) + 1 = 0$. Supongamos que el problema es cierto para cierto entero $n = k - 1$. Demostremos que es cierto para $n = k$ por contradicción. Es decir, supondremos que existe un conjunto X que no cumple para $n = k$. Si k está en X, a lo más uno de los números en cada conjunto $\{-k, 0\}, \{-k+1, 1\}, \ldots, \{-1, k-1\}$ puede estar en X, por lo que X tiene a lo más $k + 1$ enteros, lo cual es una contradicción y k no puede estar en X. De manera análoga podemos demostrar que $-k$ está en X.
Luego, todos los elementos en X cumplen que su valor absoluto es a lo más $k - 1$ y como son más que $(k-1) + 2$, por la hipótesis inductiva, podemos concluir que hay tres enteros a, b y c con $a + b = c$ y la inducción está completa.

Problemas de Entrenamiento

Esta es la sección interactiva de la revista y su construcción sólo es posible con la participación entusiata de todos sus lectores. Los siguientes 10 problemas que presentamos carecen de solución pues están esperando a que tú los resuelvas. Acepta el reto y resuelve uno o todos los *Problemas de Entrenamiento* y una vez que lo logres, envíanos tus soluciones cuanto antes para que puedan salir publicadas con tu nombre impreso.

Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo.

Problemas de Entrenamiento.
Año 2015 No. 2.

Problema 1. En un edificio con pisos numerados desde 1 hasta k hay cuatro elevadores. Cada elevador hace 3 paradas las cuales no necesariamente son en pisos consecutivos ni necesariamente incluyen al piso 1. Se sabe que para cualesquiera dos pisos, hay al menos un elevador que hace parada en ambos pisos. ¿Cuál es el máximo valor posible de k?

Problema 2. Sean ABC un triángulo y P un punto en su interior. Los pies de las perpendiculares desde P a los lados BC, CA y AB son D, E y F, respectivamente.

Encuentra los puntos P tales que se minimiza

$$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}.$$

Problema 3. Muestra que para cualquier entero positivo n el número

$$\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}$$

es un entero.

Problema 4. En un triángulo ABC con alturas AK, BL y CM y ortocentro H, sea P el punto medio de AH. Si BH y MK se intersectan en S y LP y AM se intersectan en T. Demuestra que ST es perpendicular a BC.

Problema 5. Encuentra el número de soluciones reales de la ecuación

$$\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x}{5}\right\rfloor=x.$$

(Si x es un número real, $\lfloor x\rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que x.)

Problema 6. Se tienen escritos los números $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{19}$ en un pizarrón. Dos personas juegan alternadamente. En su turno, eligen 5 de los números y les restan 1. El primer jugador que haga que uno de los números sea negativo, pierde. ¿Cuál de los dos jugadores puede asegurar su victoria y cómo?

Problema 7. Comenzando desde arriba en el siguiente arreglo triangular, empiezas a hacer un recorrido moviéndote en cada paso a cualquiera de las dos posiciones que están directamente debajo de tu posición actual. Por ejemplo, desde el 3 de arriba te puedes mover al 7 o al 4 de la segunda fila; desde ese 7 sólo puedes pasar al 2 o al 5 de la tercera fila, pero no al 6 porque el 6 no está debajo del 7.
De todos los caminos posibles, el que tiene la mayor suma es el indicado por las casillas encerradas y la suma es igual a $3+7+5+9=24$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \boxed{3} & & & \\
 & & \boxed{7} & & 4 & & \\
 & 2 & & \boxed{5} & & 6 & \\
8 & & 5 & & \boxed{9} & & 3
\end{array}$$

¿Cuál es la mayor suma que puedes lograr si haces el mismo proceso en la siguiente figura?

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & 42 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 70 & & 71 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 30 & & 35 & & 31 & & & & & & & \\
 & & & & & & 40 & & 28 & & 49 & & 61 & & & & & & \\
 & & & & & 35 & & 38 & & 62 & & 24 & & 39 & & & & & \\
 & & & & 49 & & 81 & & 57 & & 63 & & 56 & & 49 & & & & \\
 & & & 32 & & 55 & & 28 & & 06 & & 16 & & 20 & & 12 & & & \\
 & & 43 & & 41 & & 26 & & 56 & & 55 & & 40 & & 70 & & 33 & & \\
 & 71 & & 44 & & 65 & & 25 & & 43 & & 51 & & 52 & & 63 & & 42 & \\
33 & & 28 & & 47 & & 43 & & 17 & & 51 & & 39 & & 48 & & 53 & & 35
\end{array}
$$

Problema 8. Determina el mayor número capicúa que no excede a $54,321$ y que puede escribirse como suma de 3 enteros consecutivos. (Un número "capicúa" es un número que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda.)

Problema 9. Sean a, b y c números reales positivos tales que $a+b+c=1$. Demuestra que

$$\frac{1-a^2}{a+bc}+\frac{1-b^2}{b+ca}+\frac{1-c^2}{c+ab}\geq 6.$$

Problema 10. Determina todas las soluciones en enteros no negativos (a, b, c, d) que satisfacen la ecuación $2^a\cdot 3^b-5^c\cdot 7^d=1$.

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2014 No. 3.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa 3, año 2014. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa 4, año 2014, por lo que todavía estás a tiempo para que tus trabajos puedan salir publicados dándote todo el crédito que mereces.

Problema 1. Sean a y b dos enteros tales que $a > b > 0$. Si $ab - 1$ y $a + b$ son primos relativos, y también $ab + 1$ y $a - b$, demuestra que $(ab + 1)^2 + (a - b)^2$ no es un cuadrado.

Solución. Supongamos que $(ab + 1)^2 + (a - b)^2 = c^2$ para algún entero c. Entonces,

$$c^2 = a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 = (a^2 + 1)(b^2 + 1).$$

Demostraremos que $a^2 + 1$ y $b^2 + 1$ son primos relativos. Supongamos lo contrario y sea p un número primo tal que $p \mid (a^2 + 1)$ y $p \mid (b^2 + 1)$. Entonces $p \mid (a^2 - b^2)$ y de aquí, $p \mid (a - b)$ o $p \mid (a + b)$.
Si $p \mid (a-b)$, entonces $p \mid (ab-b^2)$ y como $p \mid (b^2+1)$ se sigue que $p \mid (ab+1)$, lo que es una contradicción ya que $ab + 1$ y $a - b$ son primos relativos. De manera análoga, si $p \mid (a + b)$ entonces $p \mid (ab - 1)$, que es una contradicción. Por lo tanto, $a^2 + 1$ y $b^2 + 1$ son primos relativos y su producto es un cuadrado. De aquí, $a^2 + 1$ y $b^2 + 1$ son ambos cuadrados, lo cual no puede ser ya que $a^2 + 1 = m^2 \Rightarrow 1 = (m - a)(m + a) \Rightarrow m - a = \pm 1$ y $m + a = \pm 1 \Rightarrow a = 0$. De manera análoga, $b^2 + 1 = k^2 \Rightarrow b = 0$.
Por lo tanto, $(ab + 1)^2 + (a - b)^2$ no es un cuadrado.

Problema 2. Sea ABC un triángulo con $AB > AC$. Sobre la tangente por A al circuncírculo de ABC se toma un punto D tal que $DA = AC$ y D está en el mismo semiplano definido por AB. Además, sobre el segmento AB sea E un punto tal que $AE = AC$. Demuestra que DE pasa por el incentro del triángulo ABC.

Solución. Denotemos por α, β, y γ los ángulos en los vértices A, B y C, respectivamente. Por ángulos semi-inscritos se tiene que $\angle DAC = \beta$, al ser isósceles el triángulo DAC se cumple que $\angle CDA = \frac{180^\circ - \beta}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$. Por otro lado, de manera similar en el triángulo isósceles DAE se satisface que $\angle EDA = \frac{180^\circ - \alpha - \beta}{2} = \frac{\gamma}{2}$, de donde se concluye que $\angle CDE = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}$. Sea I' el punto de intersección de la bisectriz interna del ángulo en A con DE. Por ser bisectriz se cumple que

$$\angle CAI' = \frac{\alpha}{2} = \angle CDE = \angle CDI'$$

y así el cuadrilátero $ADCI'$ es cíclico. Entonces

$$\angle I'DA = \angle ICA = \frac{\gamma}{2},$$

de donde se sigue que I está sobre la bisectriz del ángulo en C. Por lo tanto, I' es el incentro del triángulo ABC de donde se sigue el resultado.

Problema 3. Sean n un número natural, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números no negativos y $0 < b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ tales que para cualquier $k \leq n$ se satisface $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_k$. Demuestra que $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_n} \leq \sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \cdots + \sqrt{b_n}$.

Solución. Denotemos para toda $k \leq n$, $B_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_k$ y $A_k = a_1 + a_2 +$

$\cdots + a_k$. Aplicando la identidad de la suma de Abel[6], tenemos que

$$\begin{aligned}\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\cdots+\sqrt{b_n} &= b_1\left(\frac{1}{\sqrt{b_1}}\right)+b_2\left(\frac{1}{\sqrt{b_2}}\right)+\cdots+b_n\left(\frac{1}{\sqrt{b_n}}\right)\\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{b_1}}-\frac{1}{\sqrt{b_2}}\right)B_1+\left(\frac{1}{\sqrt{b_2}}-\frac{1}{\sqrt{b_3}}\right)B_2+\cdots\\ &\quad \cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{b_{n-1}}}-\frac{1}{\sqrt{b_n}}\right)B_{n-1}+\frac{1}{\sqrt{b_n}}B_n.\end{aligned}$$

Puesto que $0 < b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ se tiene que $\frac{1}{\sqrt{b_i}} - \frac{1}{\sqrt{b_{i+1}}} \geq 0$. Por lo tanto, de $B_k \geq A_k$ y utilizando la desigualdad útil[7] se tiene

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{\sqrt{b_1}}-\frac{1}{\sqrt{b_2}}\right)B_1+\left(\frac{1}{\sqrt{b_2}}-\frac{1}{\sqrt{b_3}}\right)B_2+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{b_{n-1}}}-\frac{1}{\sqrt{b_n}}\right)B_{n-1}+\frac{1}{\sqrt{b_n}}B_n\\ &\geq \left(\frac{1}{\sqrt{b_1}}-\frac{1}{\sqrt{b_2}}\right)A_1+\left(\frac{1}{\sqrt{b_2}}-\frac{1}{\sqrt{b_3}}\right)A_2+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{b_{n-1}}}-\frac{1}{\sqrt{b_n}}\right)A_{n-1}+\frac{1}{\sqrt{b_n}}A_n\\ &= \frac{a_1}{\sqrt{b_1}}+\frac{a_2}{\sqrt{b_2}}+\cdots+\frac{a_n}{\sqrt{b_n}}\\ &\geq \frac{(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n})^2}{\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\cdots+\sqrt{b_n}},\end{aligned}$$

donde la igualdad se obtiene de aplicar de nuevo la identidad de la suma de Abel. Combinando lo anterior, tenemos que

$$(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n})^2 \leq (\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\cdots+\sqrt{b_n})^2$$

que es equivalente a la desigualdad original.

Problema 4. Sea $n \geq 3$ un entero y sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales tales que $\min\limits_{1\leq i<j\leq n} |a_i - a_j| = 1$. Determina el valor mínimo de $|a_1|^3 + |a_2|^3 + \cdots + |a_n|^3$.

Solución. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Luego,

$$|a_k| + |a_{n-k+1}| \geq |a_{n-k+1} - a_k| \geq |n + 1 - 2k|$$

[6] Ver en el apéndice el teorema 9.
[7] Ver en el apéndice el teorema 8.

para $1 \leq k \leq n$. De este modo,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |a_k|^3 &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(|a_k|^3 + |a_{n+1-k}|^3) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(|a_k| + |a_{n+1-k}|)\left(\frac{3}{4}(|a_k| - |a_{n+1-k}|)^2 + \frac{1}{4}(|a_k| + |a_{n+1-k}|)^2\right) \\
&\geq \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n}(|a_k| + |a_{n+1-k}|)^3 \\
&\geq \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n}|n+1-2k|^3.
\end{aligned}$$

Cuando n es impar,

$$\sum_{k=1}^{n}|n+1-2k|^3 = 2(2^3)\cdot\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} i^3 = \frac{1}{4}(n^2-1)^2.$$

Cuando n es par,

$$\sum_{k=1}^{n}|n+1-2k|^3 = 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}(2i-1)^3 = 2\left(\sum_{j=1}^{n} j^3 - \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}(2i)^3\right) = \frac{1}{4}n^2(n^2-2).$$

Por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k|^3 \geq \begin{cases} \frac{1}{32}(n^2-1)^2 & \text{para } n \text{ impar,} \\ \frac{1}{32}n^2(n^2-2) & \text{para } n \text{ par.} \end{cases}$$

La igualdad se verifica con $a_i = i - \frac{n+1}{2}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Problema 5. Determina todos los enteros positivos x, y tales que $\dfrac{xy^3}{x+y}$ sea el cubo de un número primo.

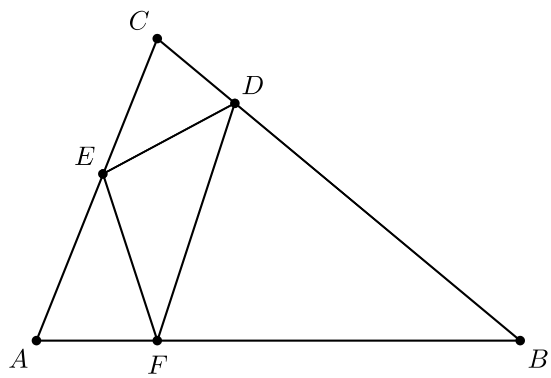
Solución. Sea p un número primo tal que

$$xy^3 = p^3(x+y). \tag{5}$$

Si $p \nmid y$, entonces $p^3 \mid x$. Escribiendo $x = p^3h$ tenemos que $p^3hy^3 = p^3(p^3h + y)$. Simplificando obtenemos que $y(hy^2-1) = p^3h$. Como $p \nmid y$, obtenemos $p^3 \mid (hy^2-1)$ y por lo tanto $y \mid h$. Sea $h = yk$. Entonces, $y(ky^3-1) = p^3yk$ y simplificando obtenemos que $k(y^3-p^3) = 1$. De aquí, $y^3 - p^3 = \pm 1$, lo que es una contradicción. Si $p \mid y$, sea $y = ps$. De (5) obtenemos que $xp^3s^3 = p^3(x+ps)$. Simplificando tenemos que $x(s^3-1) = ps$. Como s y (s^3-1) son primos relativos, se sigue que $s \mid x$ y por lo tanto $(s-1)(s^2+s+1) = (s^3-1)$ divide a p. Como $s-1 < s^2+s+1$ obtenemos $s-1 = 1$ y $s^2+s+1 = p$. De aquí, $x = s = 2$, $p = 7$ y así $x = 2$, $y = 14$.

Problema 6. Sea ABC un triángulo acutángulo y sean D, E y F puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente, tales que $\angle AFE = \angle BFD$, $\angle BDF = \angle CDE$ y $\angle CED = \angle AEF$. Demuestra que D, E y F son los pies de las alturas del triángulo ABC.

Solución. Sean $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$, $\theta = \angle BCA$, $x = \angle FDB$, $y = \angle DEC$ y $z = \angle EFA$.



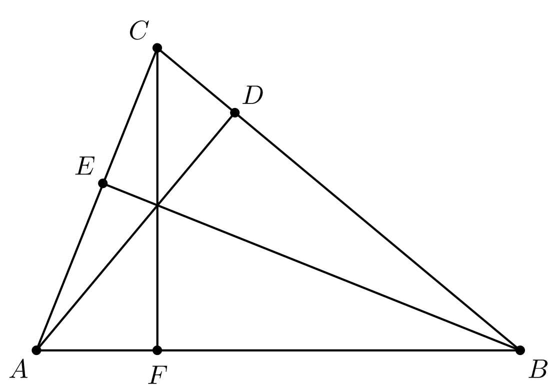
Por suma de ángulos en los triángulos AFE, BDF y CED tenemos que

$$\begin{aligned} y + z &= 180° - \alpha, \\ x + z &= 180° - \beta, \\ x + y &= 180° - \theta. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema anterior en x, y, z, y usando que $\alpha + \beta + \theta = 180°$, llegamos a que $x = \alpha$, $y = \beta$ y $z = \theta$. De aquí tenemos que $\angle DEA = 180° - \beta$, por lo que

$$\angle ABD + \angle DEA = \beta + (180° - \beta) = 180°,$$

de donde el cuadrilátero $ABDE$ es cíclico. Análogamente los cuadriláteros $BCEF$ y $CAFD$ son cíclicos.



Ahora sean $a = \angle BFC = \angle BEC$, $b = \angle CDA = \angle CFA$ y $c = \angle AEB = \angle ADB$. Como estos ángulos son mutuamente suplementarios tenemos que $a + b = b + c = c + a = 180°$. De aquí, obtenemos que $a = b = c = 90°$ y terminamos.

Problema 7. En una aldea hay al menos un habitante y hay algunas asociaciones, de manera que cada habitante pertenece al menos a k asociaciones. Además, cada dos asociaciones pueden tener a lo más un miembro en común. Demuestra que existen k asociaciones con el mismo número de miembros.

Solución. Sea A la asociación con mayor número de miembros (podría haber más de una con ese número de miembros) y digamos que tiene n miembros. Sea a un miembro de A. Como a debe estar en al menos k asociaciones, debe haber otras $k - 1$ asociaciones diferentes de A en las que a esté. Esto sucede para cada miembro de A y como no puede haber una asociación que tenga dos miembros de A, a cada miembro de A le podemos asignar $k - 1$ asociaciones que lo contengan. Luego, debe haber al menos otras $n(k - 1)$ asociaciones. Contando a A, debe haber al menos $n(k - 1) + 1$ asociaciones. Luego, por el principio de las casillas[8], como cada asociación tiene a lo más n miembros, debe haber k asociaciones con el mismo número de miembros.

Problema 8. Determina todos los enteros positivos que se pueden escribir en la forma

$$\frac{(a+b+1)^2}{ab}$$

para algunos enteros positivos a y b.

Solución. Observemos que:

$$9 = \frac{(1+1+1)^2}{1 \cdot 1}, \quad 8 = \frac{(1+2+1)^2}{1 \cdot 2}, \quad 6 = \frac{(2+3+1)^2}{2 \cdot 3}, \quad 5 = \frac{(4+5+1)^2}{4 \cdot 5}.$$

Demostraremos que estos números son los únicos enteros positivos que se pueden escribir en la forma indicada.
Sea n un entero positivo que se puede escribir en la forma indicada. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a \leq b$.
Si $n = \frac{(a+1+b)^2}{ab} = \frac{(a+1)^2+2(a+1)b+b^2}{ab}$, entonces b debe dividir a $(a+1)^2$. Luego, $(a+1)^2 = bb'$ para algún entero positivo b'.
Como:

$$\frac{(a+1+b')^2}{ab'} = \frac{(a+1+\frac{(a+1)^2}{b})^2}{a\frac{(a+1)^2}{b}} = \frac{\frac{(a+1)^2}{b^2}(b+(a+1))^2}{a\frac{(a+1)^2}{b}} = \frac{(a+1+b)^2}{ab} = n,$$

tenemos que la representación de n puede no ser única, pues obtuvimos el mismo valor n con a, b y con a, b'. Luego, para un n que se represente en la forma deseada tomamos aquella en la que $(a + 1 + b)$ sea mínimo.
Si $a + 1 + b$ es mínimo, entonces $a + 1 + b \leq a + 1 + b'$ y de aquí $b \leq b' = \frac{(a+1)^2}{b} \Rightarrow$

[8] Ver en el apéndice el teorema 6.

$b \leq a+1$.
Por lo tanto, si $n = \frac{(a+1+b)^2}{ab}$ con $a \leq b$ y $(a+1+b)$ mínimo, entonces $b \leq a+1$.
Luego, $b = a$ o $b = a+1$.
Si $b = a$, entonces $n = \frac{(2a+1)^2}{a^2} = \left(\frac{2a+1}{a}\right)^2$ es un entero positivo si y sólo si $a = 1$, dando $n = 9$.
Si $b = a+1$, entonces $n = \frac{(2a+2)^2}{a(a+1)} = \frac{4(a+1)}{a}$ es un entero positivo si y sólo si a es un divisor positivo de 4. Si $a = 1$, $n = 8$; si $a = 2$, $n = 6$; si $a = 4$, $n = 5$.
Por lo tanto, todos los enteros positivos que se pueden escribir en la forma indicada son $9, 8, 6$ y 5.

Problema 9. Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo con $a \geq b \geq c$. Prueba que $\sqrt{a(a+b-\sqrt{ab})} + \sqrt{b(a+c-\sqrt{ac})} + \sqrt{c(b+c-\sqrt{bc})} \geq a+b+c$.

Solución. Sean $a = x^2$, $b = y^2$ y $c = z^2$ con $x \geq y \geq z \geq 0$. Tenemos que

$$x^2 \leq y^2 + z^2 \leq (y+z)^2 \Rightarrow x \leq y+z,$$

de modo que x, y, z son las longitudes de los lados de un triángulo.
Sean

$$A_x = \sqrt{y^2+z^2-yz}, \quad A_y = \sqrt{z^2+x^2-zx} \ \text{ y } \ A_z = \sqrt{x^2+y^2-xy}.$$

Entonces,

$$A_x \leq A_y \Leftrightarrow y^2+z^2-yz \leq x^2+z^2-xz \Leftrightarrow (x-y)(x+y-z) \geq 0,$$

$$A_y \leq A_z \Leftrightarrow x^2+z^2-xz \leq x^2+y^2-xy \Leftrightarrow (y-z)(y+z-x) \geq 0.$$

Luego, $A_x \leq A_y \leq A_z$ y por lo tanto

$$xA_z + yA_y \geq yA_z + xA_y \Leftrightarrow (A_z - A_y)(x-y) \geq 0,$$

$$yA_y + zA_x \geq zA_y + yA_x \Leftrightarrow (A_y - A_x)(y-z) \geq 0.$$

Para nuestro problema tenemos que

$$\begin{aligned}
2(xA_z + yA_y + zA_x) &= (xA_z + yA_y) + (yA_y + zA_x) + xA_z + zA_x \\
&\geq (yA_z + xA_y) + (zA_y + yA_x) + xA_z + zA_x \\
&= (y+z)A_x + (x+z)A_y + (x+y)A_z.
\end{aligned}$$

Luego, basta mostrar que $(y+z)A_x + (x+z)A_y + (x+y)A_z \geq 2(x^2+y^2+z^2)$ para terminar.
Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz[9] obtenemos

$$(x+y)A_z = (x+y)\sqrt{x^2+y^2-xy} = \sqrt{(x+y)(x^3+y^3)} \geq x^2+y^2,$$

[9]Ver en el apéndice el teorema 7.

y de manera similar tenemos que $(x+z)A_y \geq x^2+z^2$ y $(y+z)A_x \geq y^2+z^2$. Sumando estas tres desigualdades, obtenemos que $(y+z)A_x+(x+z)A_y+(x+y)A_z \geq 2(x^2+y^2+z^2)$, como se quería.

Problema 10. Considera un tablero de 10×10 casillas. Quieres colocar n monedas en las casillas del tablero de manera que no existan 4 monedas formando un rectángulo de lados paralelos a los lados del tablero. Determina el mayor valor de n para el cual es posible hacer esta construcción.

Solución. Denotemos por A_i, con $i = 1, \ldots, 10$, al conjunto de las posiciones donde hay monedas en el i-ésimo renglón del tablero. Por ejemplo, si $A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces en el primer renglón hay monedas en las casillas 1, 2, 3 y 4. Luego, el problema es equivalente a encontrar subconjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$ del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ cuya suma del número de elementos sea lo mayor posible y tal que la intersección de dos cualesquiera de ellos sea a lo más de un elemento.
Si cada A_i tiene k_i elementos, entonces hay $\binom{k_i}{2} = \frac{k_i(k_i-1)}{2}$ subconjuntos de 2 elementos que no pueden pertenecer a dos de los conjuntos A_i. Como en total hay $\binom{10}{2} = 45$ parejas del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, tenemos que,

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{k_i(k_i-1)}{2} \leq 45.$$

Por otro lado, si existen i y j, con $k_j - k_i > 1$, entonces,

$$\begin{aligned}
\binom{k_i+1}{2} + \binom{k_j-1}{2} &= \frac{k_i(k_i+1)}{2} + \frac{(k_j-1)(k_j-2)}{2} \\
&= \frac{k_i(k_i+1)}{2} + \frac{(k_j-1)k_j}{2} - (k_j-1) \\
&< \frac{k_i(k_i+1)}{2} + \frac{(k_j-1)k_j}{2} - k_i \\
&= \binom{k_j}{2} + \frac{k_i(k_i+1)}{2} - k_i \\
&= \binom{k_j}{2} + \binom{k_i}{2}.
\end{aligned}$$

Luego, para minimizar $\sum_{i=1}^{10} \frac{k_i(k_i-1)}{2}$ manteniendo $\sum_{i=1}^{10} k_i$ fijo, debemos tener $|k_i - k_j| \leq 1$, para todo i y j. Demostraremos que $\sum_{i=1}^{10} k_i \leq 34$.
Si $\sum_{i=1}^{10} k_i \geq 40$, tendremos que el promedio de las k_i es mayor o igual a 4 y al cambiar las k_i por aquellas tales que $|k_i - k_j| \leq 1$, para todo i y j, obtendremos que las k_i son todas mayores o iguales que 4. Luego,

$$\sum_{i=1}^{10} \binom{k_i}{2} \geq 10\binom{4}{2} = 10 \cdot 6 = 60 > 45,$$

lo cual es una contradicción y $\sum_{i=1}^{10} k_i \leq 39$. Si $35 \leq \sum_{i=1}^{10} k_i \leq 39$, al cambiar las k_i por aquellas tales que $|k_i - k_j| \leq 1$, para todo i y j, obtendremos que algunas k_i son iguales a 3 y algunas otras iguales a 4. Digamos que a de ellas son iguales a 3 y $10 - a$ iguales a 4. Luego,

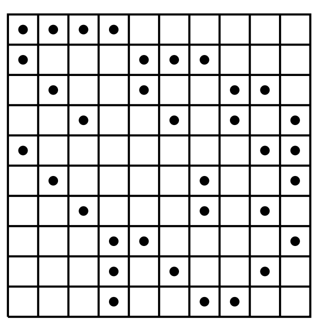
$$45 \geq \sum_{i=1}^{10} \binom{k_i}{2} = a\binom{3}{2} + (10-a)\binom{4}{2} = 3a + (10-a)6 = 60 - 3a,$$

de donde $a \leq 5$. Pero si $a \leq 5$, se tiene que $\sum_{i=1}^{10} k_i = 3a + 4(10-a) = 40 - a \leq 35$. Ahora veremos que no es posible que $\sum_{i=1}^{10} k_i = 35$. Para que esta construcción sea posible necesitamos que cada par de elementos aparezca en exactamente uno de los conjuntos A_i. Luego, cada elemento de $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ debe aparecer en 3 conjuntos con 4 elementos, o en un conjunto con 4 elementos y en 3 conjuntos con 3 elementos (pues cada uno de los otros 9 elementos aparece exactamente una vez junto con él en los conjuntos A_i).

Como en este caso hay cinco conjuntos A_i con 4 elementos y cinco con 3, debe haber al menos un elemento que pertenezca a al menos dos conjuntos A_i y por lo que acabamos de ver, debe pertenecer a tres conjuntos A_i. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_2 = \{1, 5, 6, 7\}$ y $A_3 = \{1, 8, 9, 10\}$, sin embargo cualquier otro conjunto A_i con 4 elementos debe estar contenido en $\{2, 3, \ldots, 10\}$ y por lo tanto debe de intersectar a uno de los conjuntos A_1, A_2 o A_3, en por lo menos 2 elementos, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no es posible que $\sum_{i=1}^{10} k_i = 35$.

A continuación presentamos una construcción para $\sum_{i=1}^{10} k_i = 34$:

$$A_1 = \{1, 2, 3, 4\},\ A_2 = \{1, 5, 6, 7\},\ A_3 = \{2, 5, 8, 9\},\ A_4 = \{3, 6, 8, 10\},$$
$$A_5 = \{1, 9, 10\},\ A_6 = \{2, 7, 10\},\ A_7 = \{3, 7, 9\},\ A_8 = \{4, 5, 10\},\ A_9 = \{4, 6, 9\},$$
$$A_{10} = \{4, 7, 8\}.$$



Concursos Estatales

Olimpiada Estatal de Veracruz, 2014

La Olimpiada de Matemáticas en Veracruz consta de tres etapas: Las eliminatorias de los diferentes subsistemas de enseñanza media, el concurso estatal y la selección y entrenamiento de la delegación Veracruz.

El pasado 7 de junio de 2014 se llevó a cabo en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Veracruzana, el Concurso Estatal de Veracruz de la 28^a OMM, en donde participaron 161 alumnos provenientes de todo el estado, representando a los diferentes subsistemas de enseñanza media. La competencia consistió de un examen de 4 problemas para resolverse en 4.5 horas. Se otorgaron 6 primeros lugares, 6 segundos lugares y 6 terceros lugares.

De la preselección formada por los primeros, segundos y terceros lugares de la etapa estatal, se seleccionó a la delegación que representaría al Estado de Veracruz en el Concurso Nacional, mediante dos exámenes selectivos, tomando en cuenta además su desempeño durante el entrenamiento.

A continuación presentamos el examen del Concurso Estatal de Veracruz de la 28^a Olimpiada de Matemáticas.

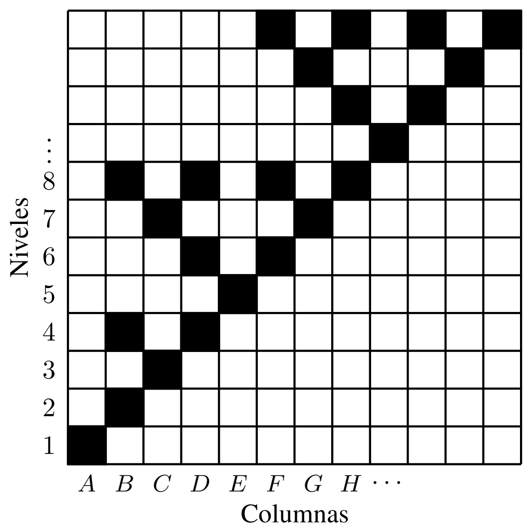
Problema 1. El lobo y Caperucita están jugando un juego con divisores de 2014. El lobo empieza con el número 1 y Caperucita con el número 2014. Por turnos, cada jugador cambia su número por otro divisor de 2014 mediante la operación de multiplicar o dividir por un número primo. El lobo ganará el juego si "alcanza" a Caperucita consiguiendo que sus números coincidad, pero Caperucita ganará si consigue hacer 100 cambios de número sin ser alcanzada. Si el lobo es quien inicia el juego y cada jugador sigue la estrategia que más le conviene, ¿quién gana?

Problema 2. Encuentra todos los números de tres dígitos $n = abc$ de tal forma que a, b y c son dígitos positivos distintos entre sí, abc es múltiplo de 2, bca es múltiplo de 3 y

cab es múltiplo de 5.

Problema 3. Considera un rectángulo $ABCD$, en donde los lados miden $AB = CD = 6$ y $BC = AD = 4$. Si E es el punto medio de AB y F es un punto entre D y E tal que $BF = 4$, encuentra el área del triángulo CDF.

Problema 4. En una cuadrícula de tamaño $2014^{2014} \times 2014^{2014}$ se pintaron de negro muchos cuadritos iniciando con el de la esquina inferior izquierda, bajo las siguientes reglas: se pintan de negro todos los cuadritos del nivel, que compartan sólo una esquina con sólo un cuadrito negro del nivel inferior y que no toquen el borde izquierdo de la cuadrícula. En la figura se muestra la esquina inferior izquierda de la cuadrícula por donde se inició el proceso.



¿En qué nivel está el cuadrito negro número 2014 de la columna D?

Concursos Internacionales

Competencia Internacional de Matemáticas 2014

La Competencia Internacional de Matemáticas (IMC) se realiza en el mes de julio. La participación es por invitación y cada país invitado puede asistir con un máximo de dos equipos, los países que han sido sede o lo serán próximamente pueden llevar hasta cuatro equipos y el país sede hasta diez. Cada equipo consiste de 4 estudiantes, un tutor y un líder. Hay dos categorías: primaria y secundaria, México sólo ha participado en la categoría de secundaria.

La IMC es muy diferente a las otras olimpiadas internacionales de matemáticas en las que participa México ya que hay participación individual y por equipo y los exámenes son el mismo día. La prueba individual consiste de un examen de 15 preguntas, las primeras doce son de respuesta sin justificación y las últimas tres son de argumentación completa, las primeras valen 5 puntos y las últimas 20 puntos cada una por lo que 120 es la máxima puntuación. El examen dura dos horas. En este examen se otorgan medalla de oro, medalla de plata, medalla de bronce, mención honorífica y constancia de participación en razón 1:2:3:4:5. De esta manera aproximadamente el 40 % de los alumnos reciben medalla y dos terceras partes reciben distinción.

El examen por equipos tiene muchas especificaciones pero esencialmente son 10 problemas a resolver en una hora, en algunos momentos individualmente y en otros de manera colectiva, cada problema vale 40 puntos por lo que 400 es la máxima puntuación del equipo. Antes del examen se hace un sorteo en donde los equipos son agrupados en bloques (se trata de que estén cerca de 15 países por bloque). Se otorga un oro, dos platas y tres bronces por bloque.

En 2014, la IMC se llevó a cabo del 21 al 25 de julio en Daejeon, Corea del Sur. México participó con dos equipos. El equipo A estuvo integrado por Juan Carlos Castro Fernández (de Morelos), Leonardo Ariel García Morn (de Jalisco), Rodolfo Flores Jiménez (de Puebla) y Sergio Felipe López Robles (de Colima). El equipo B estuvo integrado por Víctor Hugo Almendra Hernández (del Distrito Federal), Luis Alfredo Aceves Astengo (de Jalisco), Fernando Isaí Sáenz Meza (de Tlaxcala) y Alejandro

Chávez Mier (de Morelos). Por equipos, México A obtuvo una medalla de bronce. Individualmente, Víctor Hugo, Juan Carlos y Leonardo Ariel obtuvieron medalla de bronce mientras que Luis Alfredo, Fernando Isaí, Rodolfo y Sergio Felipe obtuvieron mención honorífica. Los profesores que acompañaron a los equipos mexicanos fueron Fernando Campos y Didier Solís (en el equipo A) y Hugo Villanueva y Martín Isaías (en el equipo B).

A continuación presentamos los problemas y las soluciones de la Competencia Internacional del año 2014 en la que participó México.

Examen individual

Sección A

Problema 1. Un número de dos dígitos x es el doble de otro número de dos dígitos y. La suma de los dígitos de x es igual a uno de los dígitos de y y la diferencia entre los dígitos de x es igual al otro dígito de y. ¿Cuál es el máximo valor de y?

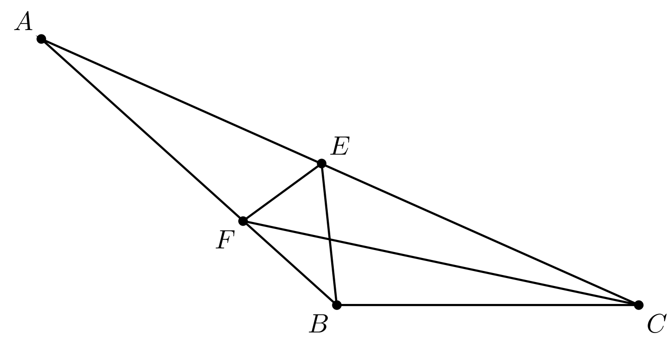
Solución. Sea $y = cd$ (c y d son dígitos). Para que el doble de y tenga dos dígitos, se necesita que $c \leq 4$. Si $d \leq 4$, tenemos que x estaría formado por los dígitos $2c$ y $2d$, pero como $2c + 2d$ es mayor tanto a c como a d, contradiría que la suma de dígitos de x es un dígito de y. Luego, $d \geq 5$ y por tanto los dígitos de x son, debido al acarreo, $2d - 10$ (en las unidades) y $2c + 1$ (en las decenas). De esta manera, la suma de los dígitos de x es $(2d - 10) + (2c + 1)$, pero esa cantidad es mayor que c puesto que $2d - 10$ es no negativo y por tanto la suma de los dígitos de x no puede ser igual a c.
Concluimos que la suma de los dígitos de x es igual a d y por tanto, $(2d-10)+(2c+1) = d$, es decir, $2c + d = 9$ por lo que d es impar. Como $d \geq 5$, las posibilidades son $d = 5, 7$ o 9. Sin embargo, como $2c + d = 9$ y $c \neq 0$ (pues y es un número de dos dígitos), descartamos el caso $d = 9$.
Si $d = 5$, tenemos que $c = 2$ y $x = 25$. El doble es 50 que cumple que la suma de sus dígitos es 5, pero su diferencia también, lo cual es una contradicción, pues tenía que ser 2. Si $d = 7$, c tiene que valer 1, por lo que $y = 17$ y $x = 34$, el cual sí cumple, pues $3 + 4 = 7$ y $4 - 3 = 1$. Luego el único valor de y es 17.

Problema 2. ¿Cuál es el resultado cuando $1234567891 \times 1234567896 \times 1234567898$ es restado de $1234567899 \times 1234567894 \times 1234567892$?

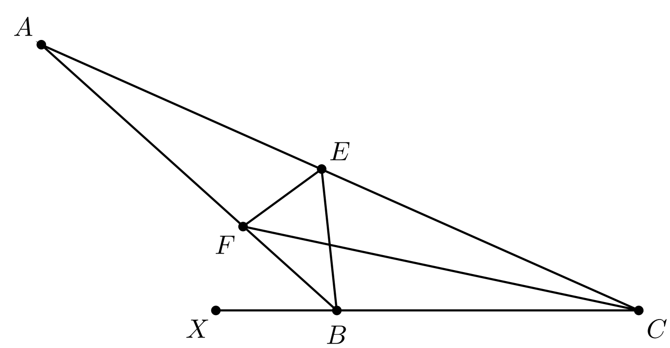
Solución. Si $x = 123456789$ el número buscado es igual a

$$\begin{aligned}
& (10x+9)(10x+4)(10x+2) - (10x+1)(10x+6)(10x+8) \\
= \; & (1000x^3 + 1500x^2 + 620x + 72) - (1000x^3 + 1500x^2 + 620x + 48) \\
= \; & 24.
\end{aligned}$$

Problema 3. En el triángulo ABC, $\angle CAB = 18°$ y $\angle BCA = 24°$. E es un punto sobre CA tal que $\angle CEB = 60°$ y F es un punto sobre AB tal que $\angle AEF = 60°$. ¿Cuál es la medida, en grados, de $\angle BFC$?



Solución. Como $\angle FEA = 60° = \angle BEC = 60°$, tenemos que $\angle FEB = 60°$. Por suma de ángulos internos del triángulo BEC se tiene que $\angle CBE = 180° - 60° - 24° = 96°$. De la misma manera, en el triángulo AEB se tiene que $\angle EBF = 180° - 18° - 120° = 42°$. Si X es un punto en la prolongación de CB, tenemos que $\angle ABX = 180° - 96° - 42° = 42°$. Por lo tanto, FB es bisectriz del ángulo EBX. Como FE es, a su vez, bisectriz del ángulo AEB, tenemos que F es un excentro del triángulo BEC (el opuesto al vértice C). Luego, FC es bisectriz del ángulo ECB, por lo que $\angle ECF = \angle FCB = 12°$ y por suma de ángulos en el triángulo FBC concluimos que $\angle BFC = 180° - 12° - 138° = 30°$.



Problema 4. Los números reales x, y y z son tales que $x - 7y + 8z = 4$ y $8x + 4y - z = 7$. ¿Cuál es el mínimo valor de $x^2 - y^2 + z^2$?

Solución. Tenemos las ecuaciones $x - 7y + 8z = 4$ y $8x + 4y - z = 7$. Multiplicando por 4 la primera y sumándole 7 veces la segunda llegamos a $60x + 25z = 65$. Despejando z y sustituyendo en $x - 7y + 8z = 4$ obtenemos $y = \frac{12-13x}{5}$. De manera similar, si multiplicamos por 8 la segunda y le sumamos la primera llegamos a $65x + 25y = 60$.

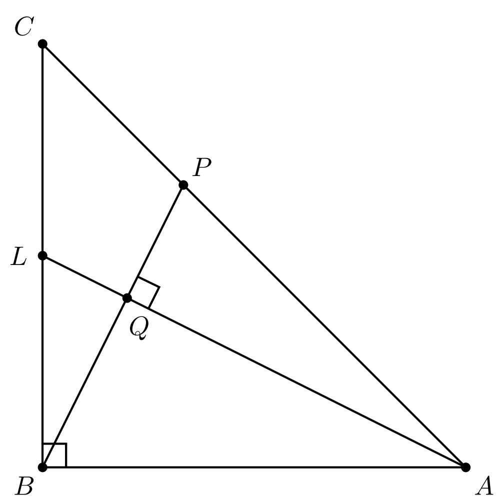
Despejando y para sustituir en cualquiera de las dos ecuaciones originales, obtenemos $z = \frac{31-12x}{5}$. Luego

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + z^2 &= x^2 - \left(\frac{12-13x}{5}\right)^2 + \left(\frac{13-12x}{5}\right)^2 \\ &= \frac{25x^2 - 144 + 312x - 169x^2 + 169 - 312x + 144x^2}{25} \\ &= \frac{25}{25} = 1, \end{aligned}$$

por lo que $x^2 - y^2 + z^2$ siempre vale 1.

Problema 5. En el triángulo ABC, $\angle CAB = \angle BCA = 45°$. L es el punto medio de BC y P es un punto sobre CA tal que BP es perpendicular a AL. Si $CP = \sqrt{2}\,cm$, ¿cuál es la longitud, en centímetros, de AB?

Solución. Sea Q la intersección de LA y BP. Como los ángulos $\angle ABQ$ y $\angle BAQ$ suman $90°$, igual que los ángulos $\angle ABQ$ y $\angle QBL$, tenemos que los ángulos $\angle BAQ$ y $\angle QBL$ son iguales y los triángulos BAQ y LBQ son semejantes y como $\frac{BA}{BL} = 2$, la razón de semejanza es $2:1$. Luego, $QA = 2QB = 4LQ$.



Aplicando el Teorema de Menelao[10] en el triángulo CLA con la recta PB, tenemos que $\frac{CB}{BL} \cdot \frac{LQ}{QA} \cdot \frac{AP}{PC} = 1$, de donde $\frac{AP}{PC} = 2$, $AP = 2CP = 2\sqrt{2}$ y $CA = 3\sqrt{2}$. Por lo tanto, $AB = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3\,cm$.

Problema 6. Si x, y y z son tres enteros positivos consecutivos tales que $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y}$ es un entero, ¿cuál es el valor de $x + y + z$?

[10]Ver en el apéndice el teorema 21.

Solución. Supongamos que $x = a - 1$, $y = a$, $z = a + 1$ para cierto entero positivo a. Tenemos, después de agrupar fracciones con el mismo denominador, que la suma buscada es igual a

$$\frac{a-1}{a} + \frac{a+1}{a} + \frac{a}{a-1} + \frac{a+1}{a-1} + \frac{a-1}{a+1} + \frac{a}{a+1} = 2 + 2 + \frac{3}{a-1} + 2 - \frac{3}{a+1}.$$

Luego, para que ese número sea entero, $\frac{3}{a-1} - \frac{3}{a+1}$ tiene que ser entero. Tenemos que $\frac{3}{a-1} - \frac{3}{a+1} = \frac{6}{(a-1)(a+1)} = \frac{6}{a^2-1}$. Luego, $a^2 - 1$ tiene que ser un divisor de 6. No puede ser igual a $-6, -3, -2, -1$ puesto que $a^2 \geq 1$. Tampoco puede ser 1 pues en ese caso tendríamos $y = a = 0$.
Por otro lado, si $a > 2$ tenemos que $a^2 - 1 > 6$, de modo que las únicas posibilidades son $a = 1$ o $a = 2$. El caso $a = 1$ lo descartamos pues $x = a - 1$ no sería positivo. Por lo tanto, la única solución sucede con $a = 2$, y en este caso $x + y + z = (a - 1) + a + (a + 1) = 6$.

Problema 7. Los números reales x y y son tales que $x^3 + y^3 = 1957$ y $(x + y)(x + 1)(y + 1) = 2014$. ¿Cuál es el valor de $x + y$?

Solución. Factorizando tenemos que $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 1957$ y $(x + y)(xy + x + y + 1) = 2014$. Sumándole tres veces la segunda ecuación a la primera, llegamos a que

$$7999 = (x + y)(x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y + 3) = (x + y)((x + y)^2 + 3(x + y) + 3).$$

Si $s = x + y$, se tiene que $7999 = s^3 + 3s^2 + 3s$. Sumando 1 a cada lado, tenemos que $8000 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 = (s + 1)^3$, de donde $s + 1 = 20$ y $s = 19$.

Problema 8. En el paralelogramo $ABCD$, $\angle BAD = 60°$. E es el punto medio de BC y F es el punto medio de CD. BD intersecta a AE en M y a AF en N. Si $AB = 15\,cm$ y $AD = 8\,cm$, ¿cuál es la longitud, en centímetros, de MN?

Solución. Sean P la intersección de las diagonales, $\alpha = \angle BAM$ y $\beta = \angle MAP$. Por la ley de cosenos en el triángulo ABD se tiene que

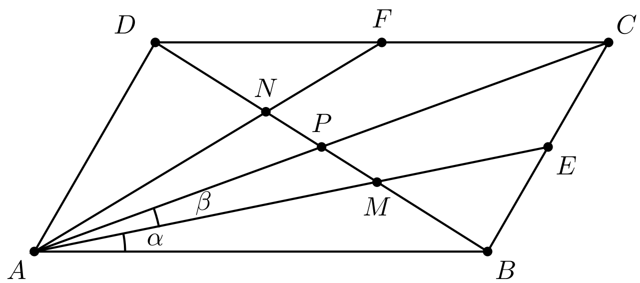
$$BD^2 = 15^2 + 8^2 - 2(15)(8)\cos(60°) = 225 + 64 - 120 = 169,$$

de donde $BD = 13$. Por la ley generalizada de la bisectriz[11] en los triángulos ABP y ABC se tiene que

$$1 = \frac{BE}{EC} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} \cdot \frac{AB}{AC},$$
$$\frac{BM}{MP} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} \cdot \frac{AB}{AP}.$$

[11] Ver en el apéndice el teorema 19.

Dividiendo estas dos expresiones y usando que $AC = 2AP$, llegamos a $BM = 2MP$. De la misma manera, llegamos a que $DN = 2NP$ y como $BP = PD$, podemos concluir que $MP = PN$ y $DN = NM = MB$. Por lo tanto, $MN = \frac{13}{3}\,cm$.



Problema 9. ¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar ocho niños, incluyendo a Anna, Bert y Cody, en una mesa redonda si Anna debe estar junto a Bert pero no junto a Coddy? Los acomodos con el mismo orden cíclico no se consideran distintos.

Solución. Pongamos primero a Anna en su lugar. Como Bert debe estar junto a Anna, tenemos dos opciones para el lugar de Bert. Como Cody no puede estar junto a Anna, puede estar en 5 de los restantes 6 lugares, por lo que tenemos $2 \times 5 = 10$ maneras de sentar a Anna, Bert y Cody. Para cada una de ellas, los otros cinco niños pueden ser sentados de $5! = 120$ maneras. Por lo tanto, el número de acomodos es igual a $10 \times 120 = 1200$.

Solución alternativa. Como Anna y Bert deben estar juntos, los podemos pensar como un bloque $[AB]$ y en vez de permutar 8 lugares, permutamos (circularmente) 7 lugares, lo cual se puede hacer de $6! = 720$ formas. Pero como Anna y Bert tienen dos formas de estar juntos, hay $2 \cdot 720 = 1440$ configuraciones.
Ahora debemos restar aquellas donde Cody se sienta junto a Bert. Esto sucede cuando se sientan los tres en bloque y por tanto en vez de tener 7 lugares a permutar, sólo son 6, lo cual se puede hacer de $5! = 120$ formas. Pero ese bloque prohibido tiene dos posibilidades: $[CAB]$ y $[BAC]$, por lo que la cantidad a restar es $2 \cdot 120 = 240$.
Por lo tanto, el número de arreglos es $1440 - 240 = 1200$.

Problema 10. ¿Cuál es el entero más grande n tal que $(\frac{21}{n} - 2)^2 - 2(\frac{21}{n} - 2) = n + 42$?

Solución. Desarrollando y multiplicando toda la ecuación por n^2 llegamos a

$$441 - 126n - 34n^2 - n^3 = 0.$$

Como n divide a $126n - 34n^2 - n^3$, n tiene que dividir a 441. Por otro lado, si n es positivo, tenemos que $0 = 441 - 126n - 34n^2 - n^3 < 441 - 126n$, de donde $n < \frac{441}{126}$, por lo que $n \leq 3$. Teniendo en cuenta esto y que n divide a $441 = 3^2 7^2$, veamos cuál es el mayor valor de n. Sea $f(n) = 441 - 126n - 34n^2 - n^3$. Tenemos que $f(3) = 441 - 378 - 306 - 27 < 0$, $f(1) = 441 - 126 - 34 - 1 > 0$, $f(-1) = 441 + 126 - 34 + 1 > 0$,

$f(-3) = 441 + 378 - 306 + 27 > 0$ y $f(-7) = 441 + 882 - 1666 + 343 = 0$.
Por lo tanto, el mayor valor de n es -7.

Problema 11. Considera todos los enteros positivos hasta el $10,000,000,000$ en los cuales cada dígito es 0 o 2. ¿Cuál es la cantidad total de ceros entre sus dígitos?

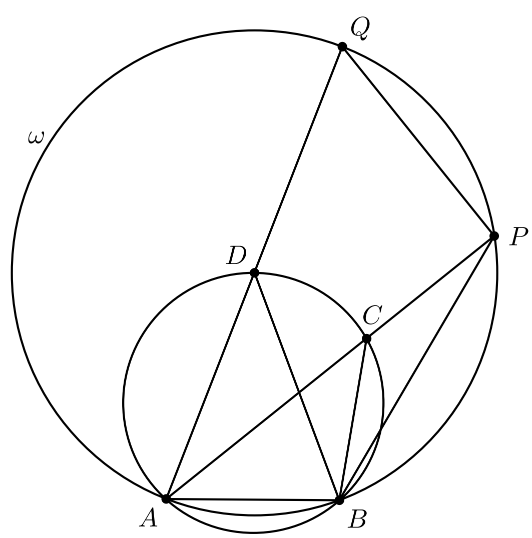
Solución. Primero veamos qué pasa si el número tiene 10 dígitos. Estos números comienzan con el dígito 2 y tenemos 2 opciones para cada una de las otras 9 posiciones, por lo que hay 2^9 números. Ignorando el primer dígito, de los $9 \cdot 2^9$ dígitos de todos estos números, por simetría, la mitad deben ser ceros. Esto es, $9 \cdot 2^8$. Análogamente, si el número tiene 9 dígitos, el número de ceros en ellos será igual a $8 \cdot 2^7$. Por lo tanto, el número buscado es igual a $9\cdot 2^8 + 8\cdot 2^7 + \cdots + 3\cdot 2^2 + 2\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 4097$.

Problema 12. A, B, C y D son cuatro puntos sobre una circunferencia en ese orden cíclico. Si $AD = BD = 50\sqrt{3}\,cm$, $AC = 106.8\,cm$ y $\angle CAD = 30°$, ¿cuál es la longitud, en centímetros, de BC?

Solución. Consideremos el círculo ω con centro en D y radio AD. Las rectas AC y AD vuelven a cortar a ω en los puntos P y Q, respectivamente. Como AQ es un diámetro de ω, tenemos que $\angle APQ = 90°$. Además, como $\angle PAQ = 30°$ y $AQ = 2AD = 100\sqrt{3}\,cm$, tenemos que $AP = \frac{\sqrt{3}}{2}AQ = 150\,cm$. Luego, $CP = AP - AC = 150 - 106.8 = 43.2\,cm$.
Por otro lado, por ángulos inscritos, tenemos que

$$2\angle APB = \angle ADB = \angle ACB = \angle APB + \angle CBP,$$

de donde $\angle APB = \angle CBP$ y el triángulo CBP es isósceles con $CB = CP = 43.2\,cm$.



Sección B

Problema 1. En un pizarrón están escritos los recíprocos de los primeros 2014 enteros positivos. En cada paso, se pueden borrar dos números y reemplazarlos por la suma de su suma y su producto. Eventualmente, queda un solo número. ¿Cuál es el máximo valor de este número?

Solución. Si tenemos los números a y b, los podemos cambiar por

$$a + b + ab = (a + 1)(b + 1) - 1.$$

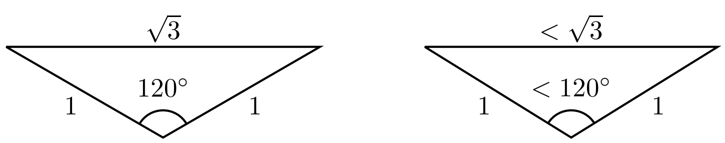
Notemos que el resultado final de todo el proceso será igual al resultado de sumar 1 a todos los números iniciales, multiplicarlos y luego restar 1. Luego, el último número es igual a

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2014}\right)-1=\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{2015}{2014}\right)-1=2015-1=2014.$$

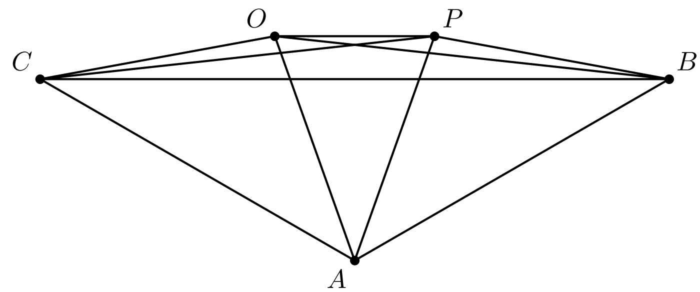
Por lo tanto, independientemente del proceso, el último número será el 2014.

Problema 2. En el triángulo ABC, $\angle ABC = \angle ACB = 30°$. Sea O un punto tal que $OA = OC = 1\,cm$ y $OB = 2\,cm$. Además, $\angle CAB = \angle CAO + \angle OAB$. ¿Cuál es la longitud, en centímetros, de BC?

Solución. Notamos primero que en un triángulo con ángulos 120°, 30° y 30°, si los lados iguales valen 1, el otro lado vale $\sqrt{3}$. Luego, si tenemos un triángulo isósceles con dos lados iguales a 1 y con el lado desigual menor que $\sqrt{3}$, el ángulo desigual debe medir menos que 120°.



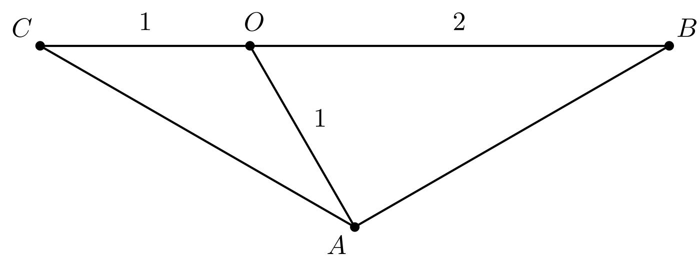
Por simetría, debe existir un punto P tal que $AP = BP = 1$ y $CP = 2$. Por la desigualdad del triángulo, tenemos que $CB \leq CO + OB = 1 + 2 = 3$, con igualdad en el caso en el que O esté sobre el lado CB. Como el triángulo CAB tiene ángulos 120°, 30° y 30°, como el lado mayor mide a lo más 3, tenemos que $CA = AB \leq \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. Luego, tenemos que los triángulos COA y BPA son isósceles con lados 1, 1 y algo menor o igual a $\sqrt{3}$, así que podemos concluir que $\angle COA = \angle APB \geq 120°$ y de aquí, $\angle CAO = \angle BAP \geq 30°$. Como $\angle BAC = 120°$, tenemos que $\angle PA =\leq 60°$ y como $PA = AO = 1$, tenemos que $OP \leq 1$.



Por la desigualdad del triángulo, tenemos que

$$2 = OB \leq OP + OB = OP + 1 \leq 1 + 1 = 2,$$

de donde se tiene que dar que $OP = 1$ y todas las igualdades en el proceso. Luego, O tiene que estar sobre el lado CB y concluimos que $CB = 3\,cm$.



Problema 3. La Torre de Daejeon consiste de 7 discos de distintos tamaños, puestos en orden creciente de arriba a abajo en la primera de tres estacas. El objetivo es mover la torre de la primera estaca a la tercera estaca. En cada movimiento el disco de encima de una estaca puede moverse hasta arriba de una estaca adyacente. Así, mover directamente de la primera estaca a la tercera estaca o viceversa está prohibido. Un disco no puede estar encima de un disco de menor tamaño que el suyo. ¿Cuál es el menor número de movimientos que se requieren?

Solución. Demostraremos, por inducción, que cuando se tienen n discos, el mínimo necesario es $3^n - 1$. La base de inducción es clara, pues cuando se tiene un disco, son necesarios dos movimientos para llevarlo a la tercera torre. Supongamos que para n discos, el mínimo necesario es justamente $3^n - 1$.
Consideremos el caso en el que hay $n+1$ discos. Para poder mover el disco más grande, tengo que quitar los otros n discos y éstos tienen que estar en la tercera torre, eso lo podemos hacer en al menos $3^n - 1$ movimientos. Luego movemos el disco grande a la segunda torre. Para poner el disco grande en la tercera torre, necesitamos pasar los otros n discos a la primera torre, ocupando al menos otros $3^n - 1$ movimientos. Luego movemos el disco grande a la tercera torre. Finalmente, tenemos que llevar los otros

n discos a la tercera torre, ocupando otros $3^n - 1$ movimientos. Luego, me tomaría al menos

$$(3^n - 1) + 1 + (3^n - 1) + 1 + (3^n - 1) = 3^{n+1} - 1$$

movimientos. Y como puedo hacerlo justamente en esa cantidad de movimientos, la inducción está completa.
La respuesta al problema es $2^7 - 1 = 127$ movimientos.

Examen en equipo

Problema 1. Sea $S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + S_5 = \frac{m}{n}$ donde m y n son enteros positivos primos relativos y

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6},\\
S_2 &= \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{2\cdot 6} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 6} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{4\cdot 6} + \frac{1}{5\cdot 6},\\
S_3 &= \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 6} + \frac{1}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6} + \frac{1}{2\cdot 5\cdot 6} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}\\
&\quad + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6} + \frac{1}{3\cdot 5\cdot 6} + \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6},\\
S_4 &= \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 6} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} + \frac{1}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6},\\
S_5 &= \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}.
\end{aligned}$$

Determina el valor de $m + n$.

Solución. Observemos que en S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 y S_6 aparecen como sumandos todos los posibles productos del conjunto $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\}$. Una forma de obtenerlos es efectuando el producto

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right)\left(1 + \frac{1}{6}\right)$$

pero quedarían todos positivos (y sobraría el término 1). Sin embargo, modificando esta idea observamos que al desarrollar

$$1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right)$$

aparecen los términos buscados con los signos adecuados.
Sin embargo, la expresión anterior es igual a

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{6},$$

por lo que $m = 5, n = 6$ y $m + n = 11$.

Problema 2. Se tienen cuatro números primos positivos distintos p, q, r y s tales que $p+q+r+s$ también es un número primo. Si p^2+qr y p^2+qs son cuadrados perfectos, determina $p+q+r+s$.

Solución. Alguno de los primos tiene que ser igual a 2, pues si todos fueran impares, la suma sería un par mayor que 2 y no sería primo. Tenemos que $p^2 + qr = x^2$ y $p^2+qs = y^2$ para ciertos enteros x e y. Factorizando tenemos que $qr = (x+p)(x-p)$ y $qs = (y+p)(y-p)$. Si q o r es igual a 2 tendríamos que $x+p$ o $x-p$ es par. Pero si uno de ellos es par, el otro también lo es y como q y r son primos, ambos tendrían que ser igual a 2, lo cual es una contradicción. Análogamente, s no es igual a 2 y tenemos que $p = 2$.
Tenemos que $qr = (x + 2)(x - 2)$ y $qs = (y + 2)(y - 2)$. Si $x = 3$, tendríamos que $qr = 5$, lo cual es imposible y $x \geq 3$. Análogamente $y \geq 3$. Como $x + 2$ y $x - 2$ son mayores a 1, necesariamente se tiene que dar que $x + 2$ y $x - 2$ sean q y r en algún orden. Análogamente, $y + 2$ y $y - 2$ son iguales a q y s en algún orden y podemos concluir que r y s son iguales a $q + 4$ y a $q - 4$ en algún orden. Como entre $q - 4$, q y $q + 4$ hay exactamente un múltiplo de 3, éste debe ser $q - 4$. Luego, $q = 7$ y r y s son iguales a 3 y 11 en algún orden. Luego,

$$p + q + r + s = 2 + 3 + 7 + 11 = 23.$$

Problema 3. Determina la suma de todos los enteros n para los cuales $9n^2 + 23n - 2$ es el producto de dos enteros positivos pares cuya diferencia es 2.

Solución. Tenemos la ecuación $9n^2 + 23n - 2 = 2x(2x + 2) = 4x^2 + 4x$ para cierto entero x. Esta es equivalente a $9n^2+23n+(-2-4x^2-4x) = 0$. Para que la solución en n sea entera, necesitamos que el discriminante

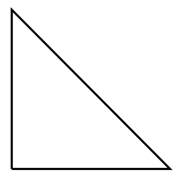
$$D = 23^2 + 4 \cdot 9(2 + 4x^2 + 4x) = 144x^2 + 144x + 61 = (12x + 6)^2 + 565$$

sea un cuadrado perfecto, digamos u^2. Tenemos $v^2 + 565 = u^2$ para $v = 12x+6 < u$, lo cual es equivalente a $565 = (u + v)(u - v)$. La factorización en primos de 565 es 5×113. Como $u + v > u - v$, solo tenemos dos opciones:

- $u + v = 565$ y $u - v = 1$. Despejando obtenemos que $u = 283$ y $v = 282$. De aquí $x = 23$ y la ecuación original es $9n^2 + 23n - 730 = 0$, cuyas soluciones son $n = -17$ y $n = \frac{130}{9}$, que no es entero.
- $u + v = 113$ y $u - v = 5$. En este caso tenemos que $u = 59$ y $v = 54$, de donde $x = 4$. La ecuación original es $9n^2 + 23n - 82$, cuyas soluciones son $n = 2$ y $n = -\frac{41}{9}$, que no es entero.

Luego, las soluciones son $n = -17$ y $n = 2$. La suma de ambas es igual a -15.

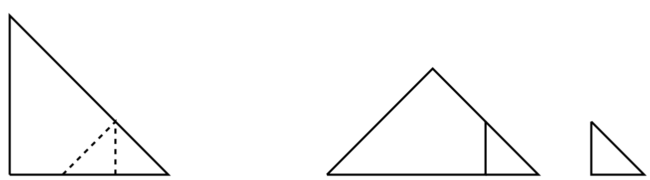
Problema 4. Recorta el siguiente triángulo rectángulo isósceles en el mínimo número de piezas con las cuales se puedan formar, sin huecos ni superposiciones, dos triángulos rectángulos isósceles de diferente tamaño.



Solución. Para ver que no es posible lograrlo con un solo corte, basta ver cómo puede ser ese corte:

- Si el corte pasa por uno de los vértices que no son el de $90°$. Es imposible pues uno de los triángulos obtenidos no será un triángulo rectángulo.
- Si el corte pasa por el vértice del ángulo de $90°$. La única opción es que vaya al punto medio de la hipotenusa, pero los triángulos resultantes serían congruentes.
- Si el corte va de un punto de un lado a un punto de otro lado, siempre se obtendrá un triángulo y un cuadrilátero.

Con dos cortes sí es posible (los dos triángulos recortados del mayor son tales que sus lados miden $\frac{1}{3}$ de aquél):



Problema 5. Determina el valor máximo de $a+b+c$ donde a, b y c son enteros positivos tales que $2b+1$ es divisible por a, $2c+1$ es divisible por b y $2a+1$ es divisible por c.

Solución. Si dos de los números son iguales, digamos $a = b$, como a divide a $2b+1 = 2a+1$, a tiene que dividir a 1, por lo que $a = b = 1$. Para que c divida a $2a+1 = 3$, c tiene que valer 1 o 3. En este caso la máxima suma es $1+1+3 = 5$.
Si los tres números son diferentes, supongamos que a es el mayor. Como $b < a$, $2b+1 \leq 2(a-1)+1 = 2a-1 < 2a$, para que $2b+1$ sea múltiplo de a, se tiene que dar que $2b+1 = a$. Consideremos ahora dos casos.

- $c < b$. Como b divide a $2c+1$, análogamente llegamos a que $2c+1 = b$. Basta ver la última divisibilidad. Se tiene que $2a+1 = 2(2b+1)+1 = 2(2(2c+1)+1)+1 = 8c+7$. Por lo que c tiene que dividir a 7. Si $c = 1$ se obtiene la terna $(a,b,c) = (7,3,1)$ cuya suma es 11, mientras que si $c = 7$ se obtiene la terna $(31,15,7)$, cuya suma es 53.

- $b < c$. Como c divide a $2a+1 = 2(2b+1)+1 = 4b+3$ y $4b+3 \leq 4(c-1)+3 = 4c-1 < 4c$, se tiene que dar que $4b+3$ sea igual a c, $2c$ o $3c$. Pero $2a+1 = 4b+3$ no puede ser igual a c, pues tendríamos que $c > a$. Tampoco puede ser igual a $2c$, pues $4b+3$ siempre es impar, por lo que tiene que ser igual a $3c$.

  $4b+3 = 3c$, por lo que $b = 3d$ para cierto entero positivo d. Se tiene que $c = 4d+1$. Falta verificar la segunda divisibilidad, la cual queda $3d \mid 2c+1 = 8d+3$. Como $3d$ divide a $9d$, tiene que dividir a $d-3$ y como $3d > d-3 > -3d$, la única opción es que $d-3 = 0$, de donde $d = 3$, $b = 9$, $c = 13$ y $a = 19$. La suma en este caso es igual a 41.

Concluimos que el máximo valor de la suma es igual a 53.

Problema 6. Determina todos los enteros positivos menores que 100 con exactamente cuatro divisores positivos tales que la diferencia entre la suma de dos de ellos y la suma de los otros dos es un cuadrado perfecto.

Solución. Para que un número n tenga 4 divisores, tiene que ser de la forma p^3 o pq donde p, q son primos. Si el número es de la forma $n = p^3$, p solo puede valer 2 o 3, pues $5^3 > 100$. Ambos números cumplen, pues si $n = 8$, se tiene que $(8+4)-(1+2) = 3^2$; y si $n = 27$, se tiene que $(27+1)-(3+9) = 4^2$.
Si $n = pq$ (con $p < q$), los divisores son: $1, p, q$ y pq y tenemos tres maneras de obtener el cuadrado perfecto:

$$\begin{aligned}(pq+1)-(p+q) &= (p-1)(q-1)\\(pq+p)-(q+1) &= (q+1)(p-1)\\(pq+q)-(p+1) &= (p+1)(q-1)\end{aligned}$$

Veamos los casos para p, que pueden ser 2, 3, 5 o 7 (pues si $p \geq 11$, $n \geq 11 \times 13 > 100$).

- $p = 2$. En la primera opción, queremos que $(p-1)(q-1) = q-1$ sea un cuadrado perfecto. Esto pasa con los primos $q = 5$, 17 y 37, obteniendo los números 10, 34 y 74. En la segunda opción, queremos que $(q+1)(p-1) = q+1$ sea un cuadrado perfecto y eso sucede solamente con $q = 3$, obteniendo el número 6. Finalmente, para que $(p+1)(q-1) = 3(q-1)$ sea un cuadrado perfecto, q tiene que valer 13, obteniendo el número 26.

- $p = 3$. Con el mismo proceso, se obtienen los números $3 \times 19 = 57$, $3 \times 7 = 21$, $3 \times 17 = 51$, $3 \times 31 = 93$ y $3 \times 5 = 15$.

- $p = 5$. En este caso se obtienen los números $5 \times 17 = 85$ y $5 \times 7 = 35$.

- $p = 7$. No se obtienen números.

Luego, los números que cumplen son: 6, 8, 10, 15, 21, 26, 27, 34, 35, 51, 57, 74, 85 y 93.

Problema 7. Un restaurante coreano ofrece un tipo de sopa cada día: sopa de pescado, sopa de res o sopa de pollo, pero no ofrece sopa de pollo tres días consecutivos. Determina el número de menús diferentes para 7 días de una misma semana.

Solución. El total de posibilidades, incluyendo aquellas que no cumplen el problema es igual a $3^7 = 2187$. De estas, quitaremos las que no cumplen el problema. Veamos cada caso, dependiendo del número de días en los que se sirvieron sopa de pollo:

1. 3 días con sopa de pollo. Hay 5 opciones para elegir los tres días consecutivos. Para los demás, habrá $2^4 = 16$ maneras de servir sopa de pescado o res. Luego, habrá $5 \times 16 = 80$ en este caso.

2. 4 días con sopa de pollo. Si los cuatro días son consecutivos, hay 4 maneras. Si no, veamos cuántas opciones hay tales que los tres días consecutivos fueron antes que el otro día en el que se sirvió sopa de pollo. Si los días consecutivos son los tres primeros, el cuarto día puede ser cualquiera de los últimos 3. Si los días consecutivos fueron el 2, 3 y 4, el cuarto puede ser cualquiera de los últimos dos. Si los días consecutivos fueron el 3, 4 y 5, el otro día solo puede ser el viernes. Esto nos da 6 maneras más. Por simetría, si los tres días consecutivos fueron después del otro día, serían otras 6 maneras, por lo que hay 16 maneras de elegir los días en los que se sirvió sopa de pollo. Para los otros tres días, hay $2^3 = 8$ maneras de servir sopa de pescado o res, por lo que el total en este caso es de $16 \times 8 = 128$.

3. 5 días con sopa de pollo. Hay $\binom{7}{5} = 21$ maneras de elegir los 5 días. De esas, las únicas que no cumplen que haya tres días consecutivos son que se sirvan en los días 1, 2, 4, 5 y 7, 1, 2, 4, 6 y 7; y 1, 3, 4, 6 y 7. Luego, hay $21 - 3 = 18$ maneras de elegir los días en los que habrá sopa de pollo. Para el resto de los días hay $2^2 = 4$ maneras de elegir las otras sopas, por lo que en este caso hay $18 \times 4 = 72$ maneras.

4. 6 días con sopa de pollo. Cualquiera de las $\binom{7}{6} = 7$ maneras de elegir los 6 días cumple que hay tres días consecutivos. La sopa del día restante puede elegirse de 2 maneras, por lo que en este caso hay $7 \times 2 = 14$ maneras.

5. 7 días con sopa de pollo. Hay solo una manera en este caso.

Por lo tanto, podemos concluir que el número buscado es igual a $2187 - (80 + 128 + 72 + 14 + 1) = 1892$.

Solución alternativa. Usaremos la estrategia de solución discutida en el artículo de este número: "Contando sucesiones binarias". Llamemos a_n al número de menús en n días. Para $n > 3$ tenemos que,

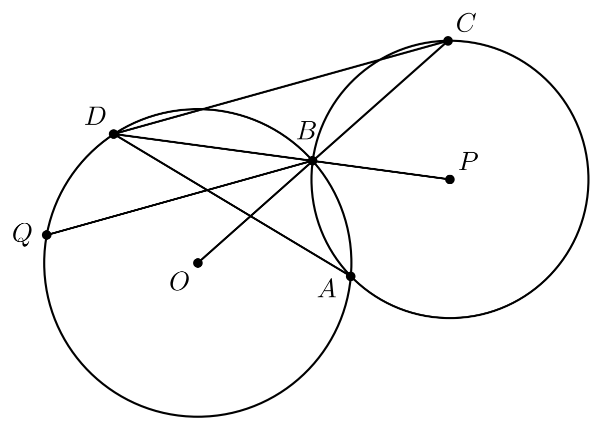
1. Si el primer día se sirve res o pescado, hay a_{n-1} formas de completar el menú, resultando en $2a_{n-1}$ menús que inician con res o pescado.

2. Si se inicia con pollo y luego se da res o pescado, hay a_{n-2} formas de completar el menú, resultando en $2a_{n-2}$ menús.

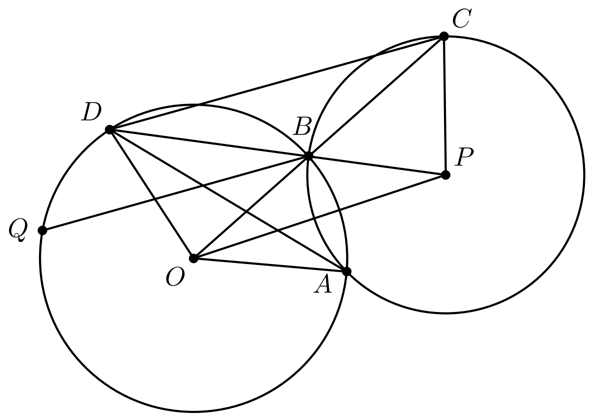
3. Si se sirve pollo los primeros dos días, en el tercero se dará res o pescado y habrá a_{n-3} formas de completar, resultando $2a_{n-3}$ menús en este caso.

Por lo tanto, $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2a_{n-3}$. Sustituyendo los valores iniciales obtenemos la sucesión $3, 6, 9, 26, 76, 222, 648, 1892, \ldots$ y por lo tanto, para 7 días de una misma semana habrá 1892 menús diferentes.

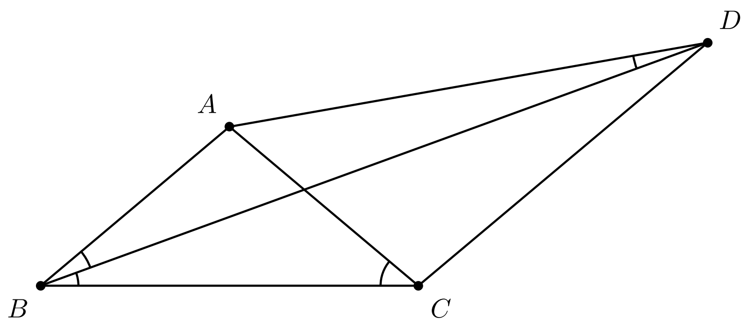
Problema 8. Dos circunferencias con centros O y P, respectivamente, se intersectan en A y B. La prolongación de OB intersecta a la segunda circunferencia de nuevo en C y la prolongación de PB intersecta a la primera circunferencia de nuevo en D. La línea que pasa por B y es paralela a CD intersecta a la primera circunferencia en $Q \neq B$. Demuestra que $AD = BQ$.



Solución. Como los triángulos OBD y PCB son isósceles y los ángulos $\angle CBP$ y $\angle OBD$ son opuestos por el vértice, tenemos que son semejantes y $\angle DOB = \angle BPC$, por lo que el cuadrilátero $DOPC$ es cíclico. Luego, $\angle CDP = \angle COP$.
Por simetría, se tiene que $\angle COP = \frac{1}{2}\angle BOA$ y por ángulos en el círculo, se tiene que $\frac{1}{2}\angle BOA = BDA$. Por lo tanto, $\angle CDB = \angle BDA$. Como las rectas CD y BQ son paralelas, tenemos que $\angle CDB = \angle DBQ$ y concluimos que $\angle BDA = \angle DBQ$. Por ángulos en ese cíclico se tiene que $\angle BQA = \angle BDA = \angle DBQ = DAQ$ y el cuadrilátero $QABD$ es un trapecio isósceles, por lo que $AD = BQ$.



Problema 9. En el cuadrilátero $ABCD$, $\angle BDA = 10°$, $\angle ABD = \angle DBC = 20°$ y $\angle BCA = 40°$. Determina la medida en grados del ángulo $\angle BDC$.

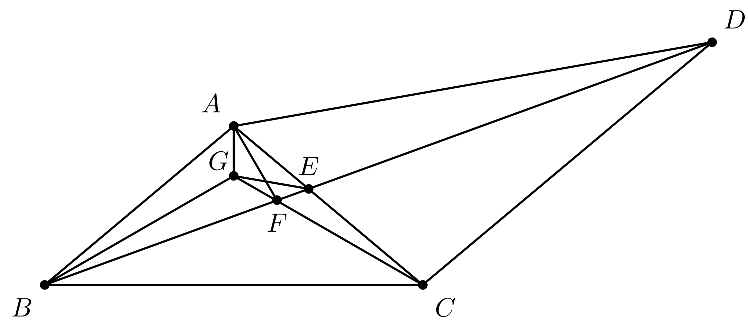


Solución. Sea E la intersección de BD con AC. Veamos que por suma de ángulos internos en el triángulo ABD se tiene que $\angle BAD = 180° - 10° - 20° = 150°$, por otro lado por suma de ángulos en el triángulo ABC se tiene que $\angle BAC = 180° - 40° - 40° = 100°$. De esto se concluye que $\angle CAD = 50°$.

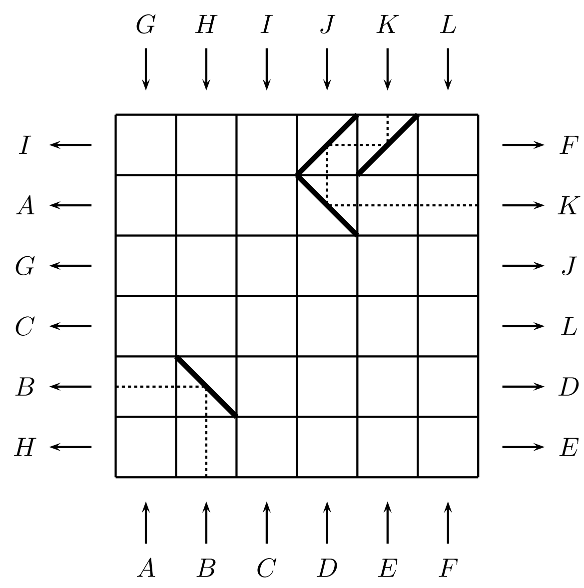
Sean P el punto de intersección distinto de D del circuncírculo del triángulo CAD con la recta BD, y Q la intersección de CP con la bisectriz del ángulo $\angle BAC$. Por ser cíclico el cuadrilátero $APCD$ se cumple que $\angle CPD = \angle CAD = 50°$ y $\angle ACP = \angle ADP = 10°$. Por ser AQ bisectriz se cumple que $QAC = \frac{100°}{2} = 50°$, entonces el cuadrilátero $AQPE$ es cíclico. Por la simetría del triángulo isósceles ABC se tiene que $\angle QBA = \angle ACQ = 10°$, entonces $\angle PBQ = \angle PBA - \angle QBA = 20° - 10° = 10° = \angle ACP$, de modo que el cuadrilátero $BQEC$ es cíclico.

Utilizando los tres cíclicos $APCD$, $AQPE$ y $BQEC$ se concluye que

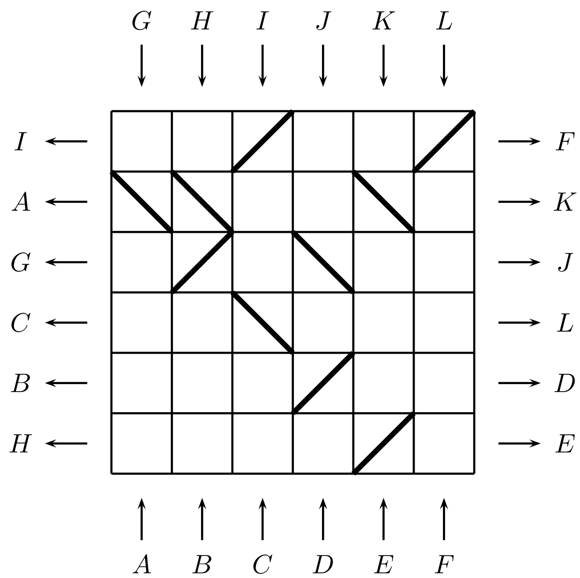
$$\angle PDC = \angle PAC = \angle PQE = \angle CBE = 20°.$$



Problema 10. El tablero de abajo muestra una cuadrícula de 6×6. Unas pelotas entran por cada una de las columnas y salen por las filas. El punto de entrada y el punto de salida de cada pelota están marcados por la misma letra. Se pueden colocar reflectores en las diagonales de las carillas de la cuadrícula. En el diagrama de abajo se muestran 4 reflectores colocados. Cuando una pelota pega en un reflector rebota en dirección perpendicular. El objetivo es conseguir que cada pelota termine en el lugar indicado, como se ilustra con las pelotas B y K. Debes quitar los cuatro reflectores usados en el diagrama y poner diez reflectores en otras casillas. No puedes poner reflectores en las mismas posiciones que en el diagrama.



Solución. Una opción es:



Romanian Master of Mathematics 2015

Del 25 de febrero al 1 de marzo de 2015 se llevó a cabo la séptima edición de la competencia *Romanian Master of Mathematics* en Bucarest, Rumania. A esta competencia solo son invitados los países con mejores resultados en los últimos años en la Olimpiada Internacional de Matemáticas y esta fue la primera vez que México participó. El equipo mexicano estuvo conformado por Kevin William Beuchot Castellanos (de Nuevo León), Juan Carlos Ortiz Rhoton (de Jalisco) y Luis Xavier Ramos Tormo (de Yucatán). Juan Carlos obtuvo una medalla de bronce, mientras que Kevin William y Luis Xavier obtuvieron una mención honorífica. El profesor que acompañó a la delegación fue Marco Antonio Figueroa Ibarra. México quedó en el lugar 16 de los 17 países participantes.

A continuación presentamos los problemas de la Romanian Master of Mathematics 2015. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas para resolverlos.

Problema 1. ¿Existe una sucesión infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de enteros positivos tal que a_m y a_n son coprimos si y sólo si $|m-n| = 1$?

(Problema sugerido por Perú)

Problema 2. Para un entero $n \geq 5$, dos personas juegan el siguiente juego en un n-ágono regular. Inicialmente, se escogen tres vértices consecutivos, y se ubica una ficha en cada uno. Un movimiento consiste en que una persona deslice una ficha a lo largo de cualquier número de lados hasta otro vértice del n-ágono sin saltar sobre otra ficha. Un movimiento es *legal* si el área del triángulo formado por las fichas es estrictamente mayor después del movimiento que antes. Las personas hacen movimientos legales por turnos, y si una persona no puede hacer un movimiento legal, esa persona pierde. ¿Para qué valores de n la persona que hace el primer movimiento tiene una estrategia ganadora?

(Problema sugerido por Reino Unido)

Problema 3. Una lista finita de números racionales está escrita en un pizarrón. En una *operación*, elegimos cualesquiera dos números a, b, los borramos, y escribimos uno de los números

$$a+b,\ a-b,\ b-a,\ a\times b,\ a/b \text{ (si } b\neq 0),\ b/a \text{ (si } a\neq 0).$$

Demuestra que, para todo entero $n>100$, sólo hay una cantidad finita de enteros $k\geq 0$, tales que, comenzando con la lista

$$k+1,\ k+2,\ \ldots,\ k+n,$$

es posible obtener, después de $n-1$ operaciones, el valor $n!$.

(Problema sugerido por Reino Unido)

Problema 4. Sea ABC un triángulo, y sea D el punto donde la circunferencia inscrita intersecta al lado BC. Sean J_b y J_c los incentros de los triángulos ABD y ACD, respectivamente. Demuestra que el circuncentro del triángulo AJ_bJ_c está en la bisectriz de $\angle BAC$.

(Problema sugerido por Rusia)

Problema 5. Sea $p\geq 5$ un número primo. Para un entero positivo k, sea $R(k)$ el residuo de k cuando es dividido entre p, con $0\leq R(k)\leq p-1$. Determina todos los enteros positivos $a<p$ tales que, para todo $m=1,2,\ldots,p-1$,

$$m+R(ma)>a.$$

(Problema sugerido por Bulgaria)

Problema 6. Dado un entero positivo n, determina el mayor número real μ que satisface la siguiente condición: para todo conjunto C de $4n$ puntos en el interior del cuadrado unitario U, existe un rectángulo T contenido en U tal que

- los lados de T son paralelos a los lados de U;
- el interior de T contiene exactamente un punto de C;
- el área de T es al menos μ.

(Problema sugerido por Bulgaria)

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** *Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.*

Definición 2 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b$ (mod m).*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $c \equiv d$ (mod m), entonces $a \equiv d$ (mod m).*
2. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $b \equiv d$ (mod m), entonces $ab \equiv cd$ (mod m).*
3. *Si $a \equiv c$ (mod m), entonces $a^n \equiv c^n$ (mod m) para todo entero positivo n.*
4. *Si $ab \equiv bc$ (mod m), entonces $a \equiv c$ (mod $\frac{m}{(b,m)}$) donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 2 (Pequeño de Fermat)**.** *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p).*

Teorema 3 (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k + 1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 4 (Combinaciones)**.** *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 5 (Binomio)**.** *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 6 (Principio de las casillas)**.** *Si $kn+1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene $k+1$ objetos. En particular, si $n+1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene dos o más objetos.*

Teorema 7 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** *Para cualesquiera números reales x_1, $\ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ se tiene que*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

La igualdad ocurre si y sólo si existe un número real c tal que $x_i = cy_i$ para $i = 1, \ldots, n$.

Teorema 8 (Desigualdad útil)**.** *Si $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ son números reales siendo $y_1, \ldots, y_n$ positivos, entonces*

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}{y_1+y_2+\cdots+y_n}$$

y la igualdad se cumple si y sólo si $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_n}{y_n}$.

Teorema 9 (Suma de Abel)**.** *Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ números reales. Si $A_j = \sum_{i=1}^{j} a_i$ para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, entonces se satisface*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = b_n A_n + \sum_{i=1}^{n-1} (b_i - b_{i+1}) A_i.$$

Teorema 10 (Suma de los ángulos internos de un triángulo)**.** *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 11 (Pitágoras)**.** *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 3 (Congruencia de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 4 (Semejanza de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA). *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 12 (Tales). *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y sólo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 13 (Desigualdad del triángulo). *Los números positivos a, b y c son las medidas de los lados de un triángulo si y sólo si se cumplen las desigualdades $a + b > c$, $a + c > b$ y $b + c > a$.*

Definición 5 (Puntos y rectas notables de un triángulo).

1. *Mediana. Recta que une un vértice y el punto medio del lado opuesto.*
2. *Centroide. Punto donde concurren las medianas. También se le llama gravicentro o baricentro.*
3. *Mediatriz. Recta perpendicular a un lado que pasa por su punto medio.*
4. *Circuncentro. Punto donde concurren las mediatrices. Es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.*
5. *Bisectriz interna. Recta que divide a un ángulo interior de un triángulo en dos ángulos de la misma medida.*
6. *Incentro. Punto donde concurren las bisectrices internas. Es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.*
7. *Altura. Recta trazada desde un vértice que es perpendicular al lado opuesto de dicho vértice.*
8. *Ortocentro. Punto donde concurren las alturas.*

Teorema 14 (Ley de los cosenos). *En un triángulo de lados a, b y c, se cumple la relación $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ donde α es el ángulo opuesto al lado a.*

Definición 6 (Ángulos en la circunferencia)**.**

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*
2. *Ángulo semi-inscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*
3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

Teorema 15 (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 16 (Medida del ángulo semi-inscrito)**.** *La medida de un ángulo semi-inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 17 (Potencia de un punto)**.**

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*
2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

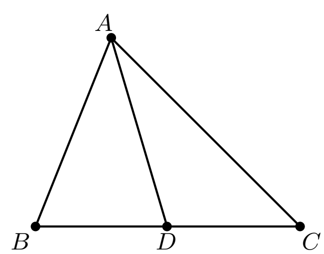
Definición 7 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 18 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y sólo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, es decir,*

$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°.$$

Teorema 19 (Ley generalizada de la bisectriz)**.** *Dados un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que*

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA\,\mathrm{sen}(\angle BAD)}{AC\,\mathrm{sen}(\angle DAC)}.$$



Teorema 20 (Simson)**.** *Las proyecciones de un punto sobre los lados de un triángulo son colineales si y sólo si el punto se encuentra sobre el circuncírculo del triángulo.*

Teorema 21 (Menelao)**.** *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y sólo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[7] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[8] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[10] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[11] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[14] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] A. Rechtman Bulajich, C.J. Rubio Barrios. *Divisibilidad y congruencias*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 2, 2009.

[16] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[17] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

Directorio del Comité Organizador de la OMM

José Antonio Gómez Ortega (presidente)
Facultad de Ciencias, UNAM
jago@ciencias.unam.mx

Ignacio Barradas Bibriesca
Universidad de Guanajuato
barradas@quijote.ugto.mx

Irving Daniel Calderón Camacho
Facultad de Ciencias, UNAM
irvingdanelc@ciencias.unam.mx

Fernando Campos García
Facultad de Ciencias, UNAM
fermexico89@hotmail.com

José Alfredo Cobián Campos
Facultad de Ciencias, UNAM
cobian@ciencias.unam.mx

Luis Cruz Romo
NA-AT Technologies
lcruzromo@gmail.com

Marco Antonio Figueroa Ibarra
Metamorfosis del CIMAT
Centro de Investigación en Matemáticas
fuerunt@gmail.com

Héctor Flores Cantú
Universidad Autónoma de Nuevo León
serolfrotceh@gmail.com

Luis Eduardo García Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
microtarxcaty@ciencias.unam.mx

Luis Miguel García Velázquez
Instituto de Matemáticas, UNAM
lmgarcia@im.unam.mx

María Eugenia Guzmán Flores
CUCEI, Universidad de Guadalajara
marugeniag@gmail.com

Jesús Jerónimo Castro
Facultad de Ingeniería
Universidad Autónoma de Querétaro
jesusjero@hotmail.com

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
Facultad de Ciencias, UNAM
ssbmplayer@gmail.com

Daniel Perales Anaya
Facultad de Ciencias, UNAM
dperanaya@hotmail.com

María Luisa Pérez Seguí
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Michoacana de
San Nicolás de Hidalgo
psegui19@gmail.com

Miguel Raggi Pérez
Escuela Nacional de Estudios Superiores
UNAM
mraggi@gmail.com

Olga Rivera Bobadilla
Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma del
Estado de México
olgarb@yahoo.com

Julio Rodríguez Hernández
SEMS, Universidad de Guadalajara
juliorod@sems.udg.mx

Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
carlos.rubio@uady.mx

David Guadalupe Torres Flores
Metamorfosis del CIMAT
Centro de Investigación en Matemáticas
ddtorresf@gmail.com

Rogelio Valdez Delgado
Facultad de Ciencias, UAEM
valdez@uaem.mx

Rita Vázquez Padilla
Universidad Autónoma
de la Ciudad de México
ritavz14@gmail.com

Hugo Villanueva Méndez
Centro de Estudios en Física y Matemáticas Básicas y Aplicadas
Universidad Autónoma de Chiapas
hugo.villanueva@unach.mx

Dirección Postal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

Cubículo 201, Departamento de Matemáticas.
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria. Colonia Copilco, C.P. 04510.
Delegación Coyoacán. México, Distrito Federal.
Teléfono: (55) 5622-4864. Fax: (55) 5622-5410.
Email: `omm@ciencias.unam.mx`

Página oficial de la OMM: `http://ommenlinea.org/`

¡Síguenos en facebook y en twitter!

`http://facebook.com/OlimpiadaMatematicas`

`@ommtw`