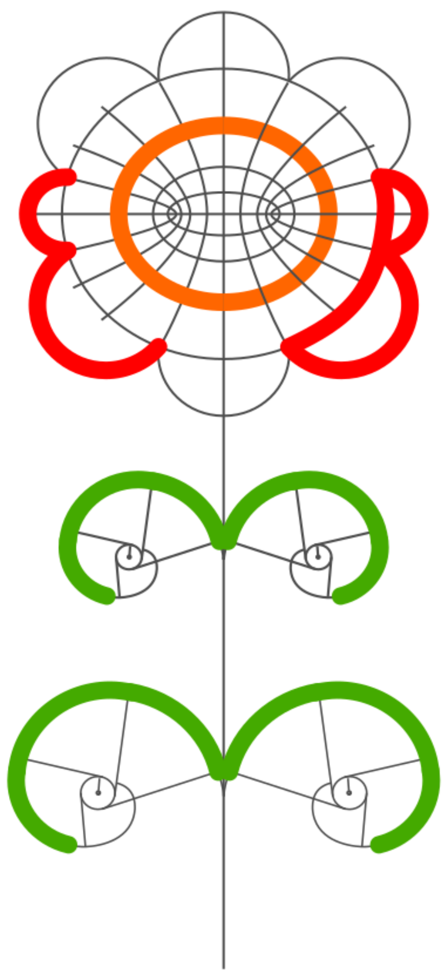
Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica

Folleto Introductorio

Contacto:

Olimpiada Mexicana de Matemáticas.
Cubículo 201,
Departamento de Matemáticas.
Facultad de Ciencias, UNAM.
Col. Copilco, Delegación Coyoacán.
C. P. 04510.
Ciudad de México.
Teléfono: (55) 5622-4864,
Fax: (55) 5622-5410,
Email: omm@ciencias.unam.mx



Editores:

Didier A. Solís Gamboa. (UADY)
Hugo Villanueva Méndez. (UNACH)

Índice general

Temario.

1.1. Combinatoria y Matemáticas Discretas.

1. Principios de conteo
   - Regla de suma y producto.
   - Permutaciones.
   - Combinaciones.
   - Principio de inclusión − exclusión.
2. Inducción matemática.
3. Principio de las casillas.
4. Sucesiones.
5. Recursiones.
6. Grafos.
7. Caminos.
8. Juegos y estrategia ganadora.
9. Problemas dinámicos.
10. Invarianza.
11. Principios extremales (máximo y mínimo).

1.2. Geometría.

1. Teorema de Pitágoras.
2. Teorema de Tales.
3. Congruencia y semejanza de triángulos.
4. Triángulos especiales
   - Rectángulos $3-4-5$, $30°-60$, $45°-45°$.
   - Equiláteros.
5. Trigonometría
   - Funciones de ángulos especiales (múltiplos de $15°$).
   - Leyes de seno y coseno.
6. Puntos y rectas notables del triángulo
   - Mediatrices y circuncentro.
   - Bisectrices e incentro.
   - Alturas y ortocentro.

- Medianas y gravicentro.
- Bisectrices externas y excentros.

7. Área de un triángulo.
    - Fórmula de Herón.
    - Fórmulas que invlucran el inradio o el circunradio.
    - Fórmulas trigonométricas.
8. Geometría de cuadriláteros.
    - Rectángulos.
    - Paralelogramos.
    - Rombos.
9. Geometría del círculo.
    - Ángulos en una circunferencia.
    - Cuadriláteros cíclicos.
10. Polígonos regulares.
11. Trazos auxiliares.

1.3. Aritmética y Teoría de Números.

1. Algoritmo de la división.
2. Divisibilidad.
    - Propiedades.
    - Criterios.
3. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.
4. Números primos.
    - Teorema fundamental de la Aritmética.
    - Lema de Euclides.
5. Congruencias
    - Propiedades.
    - Pequeño teorema de Fermat.
    - Teorema de Wilson.
    - Teorema chino del residuo.
6. Ecuaciones diofantinas.
7. Función de Euler.

1.4. Álgebra.

1. Productos notables.
2. Factorización.
3. Progresiones aritméticas y geométricas.
4. Suma de Gauss
5. Sistema de ecuaciones.
6. Ecuación cuadrática.
   - Fórmula General.
   - Fórmulas de Vieta.
7. Polinomios y raíces.
8. Desigualdades
   - Propiedades.
   - Inecuaciones.
   - Media aritmética-geométrica.
9. Teorema del binomio.

Convocatoria.

2.1. Justificación.

Las matemáticas son una herramienta básica en el estudio de cualquier tema; son muy útiles para mejorar la calidad de vida y para lograr un desarrollo profesional completo. En la educación básica, primaria y secundaria, el estudiante adquiere habilidades en la escritura, la lectura y la aritmética. Un programa de aprendizaje de las matemáticas debe estimular la creatividad y desarrollar el pensamiento crítico y analítico; uno de los principales objetivos del Programa de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) es promover el estudio de las matemáticas en forma creativa, para desarrollar el razonamiento y la imaginación de los jóvenes participantes; alejándose del enfoque tradicional que promueve la memorización y mecanización de fórmulas y algoritmos.

En el año 2017, la OMM organiza la Primera Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica: OMMEB 2017, en los niveles de Primaria y Secundaria. Esto representa una gran oportunidad de colaboración con la educación básica de México en el mejoramiento del aprendizaje de las matemáticas usando una competencia académica como herramienta para el desarrollo de habilidades matemáticas de los estudiantes equivalente a los estándares internacionales.

2.2. Objetivos.

a) Organizar la OMMEB para Nivel I (4º y 5º de primaria), Nivel II (6º de primaria y 1º de secundaria) y Nivel III (2º de secundaria).

b) Crear una atmósfera académica para motivar a los maestros y estudiantes para mejorar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con énfasis en el desarrollo de habilidades cognitivas, de pensamiento crítico y analítico.

c) Establecer cooperación a través de redes para el desarrollo de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con organizaciones educativas en los distintos estados y a nivel nacional.

d) Ofrecer a los estudiantes participantes de los distintos estados oportunidades de intercambio cultural, académico y de conocimientos matemáticos.

e) Mejorar la currícula en matemáticas de la educación básica para estar a la par de los estándares internacionales.

2.3. Actividades.

a) Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica en sus tres niveles.

b) Intercambio cultural entre los participantes.

2.4. Programa propuesto.

La Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica se llevará a cabo del 9 al 12 de junio de 2018, en Mérida, Yucatán, con el siguiente programa:

Fecha	Estudiantes	Delegados y coordinadores
9 de junio de 2018	Llegada y registro	Llegada
10 de junio de 2018	Prueba Individual y por Equipos	Prueba Individual y por Equipos
11 de junio de 2018	Actividades recreativas	Revisión de las pruebas
12 de junio de 2018	Premiación	Premiación

2.5. Información general de la OMMEB 2018.

2.5.1. Participación y aplicación.

La participación en la competencia es a través de los comités estatales de la OMMEB. Cada Estado participante lo puede hacer con a lo más un equipo en cada categoría, donde la organización del evento será responsable de los gastos de hospedaje y alimentos durante el periodo oficial de la competencia en Mérida, Yucatán. Cada equipo estará integrado por un máximo de 4 personas: un líder y 3 estudiantes (una misma persona puede ser líder de más de un equipo). Es recomendable que el Delegado estatal asista con su delegación.

2.5.2. Categorías de la competencia.

La OMMEB está compuesta por tres niveles:

a) Nivel I: 4º y 5º de primaria.

b) Nivel II: 6º de primaria y 1º de secundaria

c) Nivel III: 2º de secundaria.

2.5.3. Perfil de los participantes.

a) Nivel I:

- Estudiantes de 4º y 5º año de nivel primaria o una institución equivalente.
- Los estudiantes no deben haber cumplido 13 años al 1 de agosto del 2018.
- Los estudiantes deberán entregar un comprobante escolar que certifique el grado académico que está cursando.

b) Nivel II:

- Estudiantes de 6º año de nivel primaria y 1º de nivel secundaria o en una institución equivalente.
- Los estudiantes no deben haber cumplido 15 años al 1 de agosto del 2018.
- Los estudiantes deberán entregar un comprobante escolar que certifique el grado académico que está cursando.

c) Nivel III:

- Estudiantes de 2º año de nivel secundaria o en una institución equivalente.
- Los estudiantes no deben haber cumplido 16 años al 1 de agosto del 2018.
- Los estudiantes deberán entregar un comprobante escolar que certifique el grado académico que está cursando.

2.5.4. Exámenes.

La competencia consiste en dos tipos de exámenes: individual y por equipos. El formato de los exámenes es el siguiente:

† Prueba Individual:

- Nivel I: consta de 15 problemas a responder en 90 minutos. Solo la respuesta es necesaria. Cada problema tendrá un valor de 10 puntos. Para los problemas que tengan más de una respuesta, se dará el total de puntos SÓLO si todas las respuestas escritas son las correctas. No se darán puntos parciales. No hay penalización por respuesta incorrecta.

- Niveles II y III: Constará de 15 problemas a responder en 120 minutos. Los problemas se dividen en dos partes: La Parte A consistirá de 12 problemas en los cuales solo la respuesta es requerida. Para los problemas que tengan más de una respuesta, se dará el total de puntos SÓLO si todas las respuestas escritas son las correctas. No se darán puntos parciales. No hay penalización por respuesta incorrecta. Cada problema tendrá un valor de 5 puntos. La Parte B consistirá de 3 problemas y las soluciones tendrán que ir acompañadas de argumentos o explicaciones que sustenten su procedimiento y respuesta. Cada problema de la Parte B tendrá un valor de 20 puntos y se podrán otorgar puntos parciales. El examen tiene una puntuación total de 120 puntos.

‡ Prueba por Equipos: En los tres niveles, la prueba por equipos consistirá de 8 problemas a resolver en 70 minutos de la siguiente manera:

- En los primeros 10 minutos, se le entregará a cada equipo los primeros seis problemas. Durante estos 10 minutos, los integrantes del equipo pueden platicar y comentar las posibles soluciones de los problemas, pero NO podrán escribir nada. También se repartirán los 6 problemas de manera que a cada participante le corresponda al menos un problema.
- Los siguientes 35 minutos, cada miembro del equipo trabajará de manera individual los problemas que le fueron asignados. Durante este tiempo, sí podrán escribir.
- En los últimos 25 minutos, los tres miembros del equipo recibirán los últimos dos problemas, los cuales podrán trabajar de manera conjunta y redactar las respectivas soluciones.
- En los problemas 1, 3, 5 y 7, SÓLO se requiere la respuesta; no se darán puntos parciales. En los problemas 2, 4, 6 y 8 se requieren las soluciones completas, acompañadas de argumentos o explicaciones que sustenten su procedimiento y respuesta; se podrán dar puntos parciales.
- Cada problema de la Prueba por Equipos tendrá un valor de 40 puntos.

2.5.5. Problemas.

Cada estado deberá enviar al menos 6 problemas inéditos, usando formato Word o LaTex, escritos con solución, para los tres niveles; específicamente, al menos 2 problemas para cada nivel. El Comité Académico de la OMMEB los podrá considerar al momento de elaborar los exámenes de la competencia. Los delegados deberán abstenerse de usar los problemas que han propuesto en sus exámenes o entrenamientos estatales o alguna otra competencia. Los problemas deberán ser enviados exclusivamente al correo electrónico hvillam@gmail.com

2.5.6. Asistencia médica para los participantes.

Los delegados deberán contratar un seguro contra accidentes para todos los estudiantes durante el periodo oficial de la competencia. El seguro deberá cubrir las consecuencias de los accidentes, como muerte e inhabilitación de partes del cuerpo.

2.5.7. Periodo de inscripción y procedimiento.

Para poder participar en la OMMEB, cada estado deberá:

a) Confirmar su asistencia a más tardar el 30 de marzo de 2018, indicando en cuáles niveles participarán.

b) Enviar el formato de registro debidamente llenado a más tardar el 4 de mayo de 2018.

c) Enviar problemas propuestos a más tardar el 4 de mayo de 2018.

d) Informar itinerario de llegada y salida a más tardar el 9 de mayo de 2018.

e) Confirmar itinerario a más tardar el 23 de mayo de 2018.

Toda la información requerida deberá enviarse a los correos: ommeb2018@gmail.com y omm@ciencias.unam.mx con excepción de los problemas propuestos, los cuales deberán ser enviados a hvillam@gmail.com

Importante: En caso de no proporcionar la información requerida en tiempo y forma, el estado se hará acreedor de una sanción e incluso podría negarse su participación en la OMMEB.

2.5.8. Gastos. (Período oficial: 9 al 12 de junio de 2018).

a) Los organizadores serán responsables de todos los gastos oficiales de los equipos estatales participantes (4 personas por equipo como máximo), incluyendo hospedaje, alimentación y paseos durante el periodo oficial de la competencia. Podría solicitarse una cuota de inscripción por cada equipo participante.

b) Los participantes extras, observadores, profesores, padres y personas acompañantes tendrán que pagar un costo de $3,500 pesos por el hospedaje, alimentos y actividades durante el periodo oficial del evento, además de confirmar su asistencia a más tardar el 6 de abril, de no hacerlo las reservaciones y alimentos correrán por su cuenta y fuera del evento.

c) Cada equipo participante es responsable de los gastos de transportación desde sus respectivos estados al lugar sede de la competencia.

d) Recomendamos a los padres y personas acompañantes registrarse de manera oficial a través del respectivo delegado de la OMMEB en el estado. Aquellos que no se registren y estén interesados en participar en las actividades de la OMMEB, los organizadores se reservan el derecho de admisión a dichas actividades.

2.5.9. Comité Académico de la OMMEB.

El comité académico de la OMMEB está integrado por:

Ricardo Díaz Gutiérrez,
Luis Eduardo García Herández
José Antonio Gómez Ortega,
Olga Rivera Bobadilla,
Didier Solís Gamboa,
Rogelio Valdez Delgado (Presidente),
Hugo Villanueva Méndez (Secretario General).

2.5.10. Premios y reconocimientos.

a) Premios Individuales. Se otorgarán medallas de Oro, Plata y Bronce, así como Menciones Honoríficas a 2/3 de los participantes, aproximadamente en razón 1:2:3:4.

b) Premios por equipos. Se otorgarán medallas de Oro, Plata y Bronce a los tres mejores equipos de cada categoría.

c) Premios de Campeón de Campeones. Se otorga en cada categoría al equipo con el mayor puntaje total, calculando la suma de los puntajes de los tres miembros del equipo en la Prueba Individual y el puntaje de equipo en la Prueba por Equipos.

2.6. IMC.

Los ganadores de los distintos niveles se pre-seleccionarán para recibir entrenamiento y presentar exámenes selectivos para conformar a los equipos que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), que se celebrará en el verano de 2019.

2.7. Responsable.

Olimpiada Mexicana de Matemáticas.
Cubículo 201,
Departamento de Matemáticas.
Facultad de Ciencias, UNAM.
Col. Copilco, Delegación Coyoacán.
C. P. 04510.
Ciudad de México.
Teléfono: (55) 5622-4864,
Fax: (55) 5622-5410,
Email: omm@ciencias.unam.mx

Prueba individual

3.1. Nivel I.

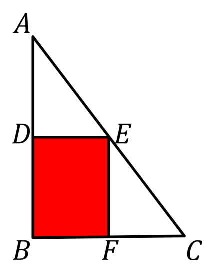
1. Ricardo escribe una lista de números de acuerdo a la siguiente regla: a partir del tercer número de la lista, cada número es dos veces la suma de los dos números anteriores. El séptimo número de la lista es 8, y el noveno es 24. ¿Cuál es el onceavo número de la lista?

2. Encuentre la cantidad de múltiplos de 11 en la sucesión:

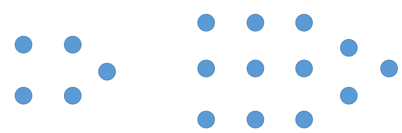
$$99, 100, 101, 102, \cdots, 20130.$$

3. Un granjero tiene 7 vacas, 8 ovejas y 6 cabras. ¿Cuántas cabras más debe comprar para que la mitad de sus animales sean cabras?

4. Los vértices D, E y F del rectángulo son los puntos medios de los lados de $\triangle ABC$. Si el área de $\triangle ABC$ es 48 cm^2, encuentra el área (en cm^2) del rectángulo $DEFB$.



5. Considera la siguiente sucesión de figuras. ¿Cuántos puntitos tendrá la figura 9?

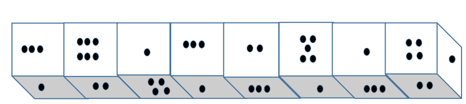


6. Deeds le juega una broma a Hugo al esconderle la llave de su casa en una caja. Cuando Hugo llega al salón encuentra 4 cajas: 3 vacías y una que tiene la llave. Deeds dejó escrito el siguiente mensaje en la pizarra: “Exactamente una de las siguientes afirmaciones es verdadera:”

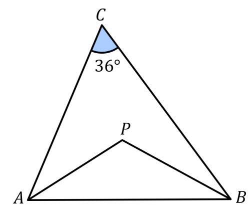
   a) La llave está en la caja 3 o la caja 4
   b) La llave está en la caja 2
   c) La llave no está en la caja 4
   d) La llave está en la caja 1 o en la caja 2

   ¿En qué caja está la llave de Hugo?

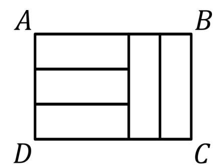
7. En la siguiente figura, podemos ver 17 caras de los dados. Halla la suma de los números en las caras restantes.



8. En $\triangle ABC$, $\angle ACB = 36°$ y las bisectrices de los ángulos internos $\angle CAB$ y $\angle ABC$ se intersectan en P. Encuentre la medida en grados de $\angle APB$.



9. El rectángulo $ABCD$ está dividido en cinco rectángulos congruentes como se muestra en la figura. Halla la razón AB/BC.

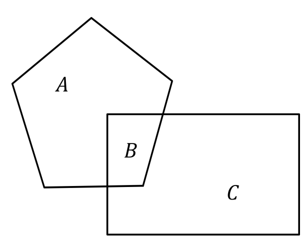


10. Hay 100 personas en una habitación. 60 de ellos dicen que les gustan las matemáticas, pero solo a 50 realmente les gustan. Por otro lado, 30 niegan correctamente que les gustan las matemáticas, ¿cuántas personas les gustan las matemáticas pero se niegan a admitirlo?

11. Drini y Deeds le dieron de propina a su mesero 50 pesos cada quien. Drini le dio el equivalente a 4 % de su cuenta, mientras que Deeds le dio el equivalente 10 % de la suya. ¿Cuál es el suma total de ambas cuentas?

12. El producto de los dígitos de un número de cuatro cifras es 810. Si ninguno de los dígitos se repite, la suma de estos dígitos es:

13. El diagrama de abajo muestra un pentágono (formado por la región A y la región B) y un rectángulo (formado por la región B y la región C) que se intersecan entre sí. La región de intersección B es $\frac{3}{16}$ del pentágono y $\frac{2}{9}$ del rectángulo. Si la razón de la región A del pentágono entre la región C del rectángulo es $\frac{m}{n}$ es su forma simplificada, encuentre el valor de $m+n$.



14. Determina cuántos enteros positivos dividen a $5^8 + 2 \times 5^9$.

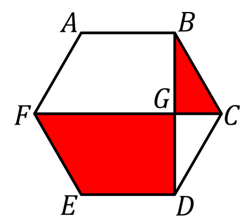
15. El número de formas para acomodar 5 niños y 6 niñas en una fila de tal manera que las niñas puedan estar junto a otras niñas pero los niños no pueden estar junto a otros niños es $6! \times k$. Encuentre el valor de k.

3.2. Nivel II.

Parte A

1. Los dígitos 2, 2, 3, y 5 se ordenan al azar para formar un número de cuatro dígitos. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma del primer y el último dígito sea par?

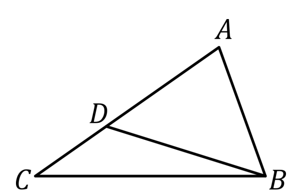
2. En el hexágono regular $ABCDEF$, dos de las diagonales, FC y BD, se intersectan en G. La razón entre el área del cuadrilátero $FEDG$ y el área del $\triangle BCG$ es:



3. Sesenta hombres trabajando en una construcción han hecho 1/3 del trabajo en 18 días. El proyecto está retrasado y debe ser completado en los siguientes doce días. ¿Cuántos trabajadores más se necesita contratar?

4. Si todas las palabras que se pueden formar al permutar las letras de la palabra SMART son ordenadas alfabéticamente, ¿qué lugar ocupa la palabra SMART?

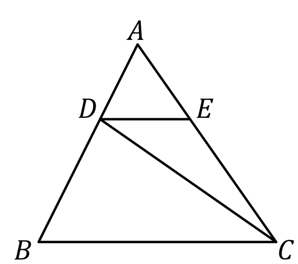
5. En $\triangle ABC$ tenemos que $AB = AD$ y $\angle ABC - \angle ACB = 45°$. Encuentra la medida en grados de $\angle CBD$.



6. Juan calcula la suma de los primeros n enteros positivos y encuentra que la suma es 5053. Si ha contado un entero dos veces, ¿cuál es éste?

7. ¿Cuál es el mayor entero positivo n que satisface $n^{200} < 5^{300}$?

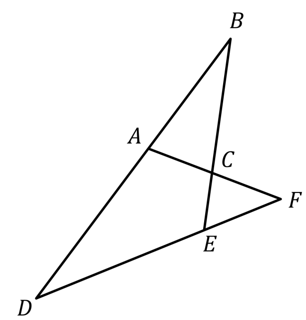
8. En la siguiente figura, si $DE \parallel BC$, Área $(\triangle ADE) = 1$ cm^2 y Área $(\triangle ADC) = 5$ cm^2, encuentre la medida en cm^2 de Área $(\triangle DBC)$.



9. Si a y b son enteros positivos tales que $a^2 + 2ab - 3b^2 - 41 = 0$, encuentre el valor $a^2 + b^2$.

10. Encuentre el menor entero positivo n tal que $2^8 + 2^{11} + 2^n$ es un cuadrado perfecto.

11. En la figura de abajo, se tiene que $BA = BC$, $AD = AF$, $EB = ED$. Halla la medida en grados de $\angle BED$.

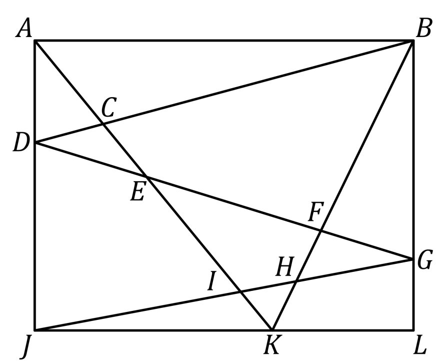


12. Sean a, b y c números reales tales que $\dfrac{ab}{a+b} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{bc}{b+c} = \dfrac{1}{4}$ y $\dfrac{ca}{c+a} = \dfrac{1}{5}$. Encuentre el valor de $\dfrac{24abc}{ab+bc+ca}$.

Parte B

1. Sean a, b, c, d, e enteros positivos que satisfacen $5a = 4b = 3c = 2d = e$ y $k = a + 2b + 3c + 4d + 5e$. Encuentra el menor valor que puede tomar k.

2. El diagrama de abajo muestra un rectángulo $ABLJ$, donde el área de ACD, $BCEF$, $DEIJ$ y FGH son $22\,\text{cm}^2$, $500\,\text{cm}^2$, $482\,\text{cm}^2$ y $22\,\text{cm}^2$ respectivamente. Encuentre el área de HIK en cm^2.



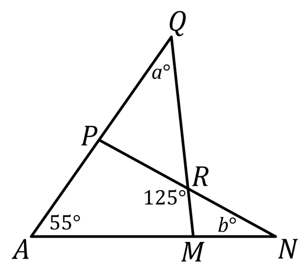
3. ¿Cuál es el mayor entero positivo n para el cual $n^3 + 2006$ es divisible por $n + 26$?

3.3. Nivel III.

Parte A

1. Sea N la suma de todos los múltiplos positivos de 8 que no exceden 8000. Halla el entero más cercano a $\sqrt{N}$.

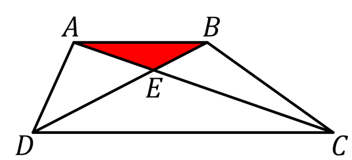
2. Halla el valor en grados de $a+b$ en el siguiente diagrama:



3. Si $z^3-1=0$ y $z\neq 1$, encuentra el valor de $z+\dfrac{1}{z}+4$.

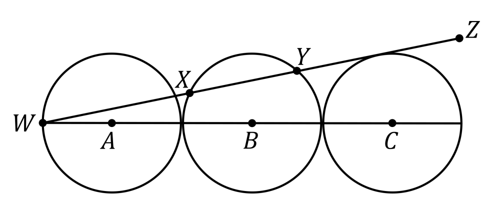
4. La edad de Lalo actualmente es el doble de la edad que tenía Jorge cuando Lalo tenía la edad actual de Jorge. Cuando Jorge tenga la edad que tiene Lalo, la suma de sus edades será 63. Halla las edades actuales de Lalo y Jorge.

5. $ABCD$ es un trapecio con AB paralelo a CD. Si $AB=6$, $CD=15$ y el área de $\triangle ABC=30$, ¿cuál es el área de $\triangle AEB$?



6. Uge tira 6 dados comunes ¿Cúal es la probabilidad de que la suma sea 10?

7. Tres círculos de radio 20 cm. son tangentes y sus respectivos centros A, B y C son colineales, como lo indica la figura. Si la línea WZ es tangente al tercer círculo, encuentre la longitud (en cm) de XY.



8. Sean m,n dos enteros positivos que satisfacen

$$\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\frac{1}{4\times5\times6}+\cdots+\frac{1}{13\times14\times15}+\frac{1}{14\times15\times16}=\frac{m}{n}.$$

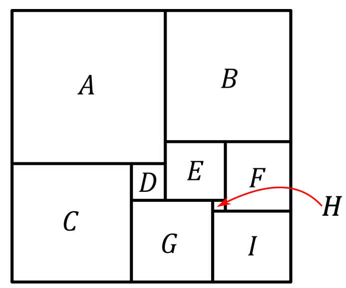
   Si m/n es una fracción simplificada, halla el valor de $m+n$.

9. Si $a+\dfrac{1}{a+1}=b+\dfrac{1}{b-1}-2$ y $a-b+2\neq 0$, halla el valor de $ab-a+b$.

10. Sea $ABCDEF$ un hexágono tal que las diagonales AD, BE y CF se intersectan en el punto O, y el área de un triangulo formado por cualesquiera tres vértices consecutivos es 2 cm^2 (por ejemplo, l Área ($\triangle BCD$) $=2$ cm^2). Encuentre el valor en cm^2 del área del hexágono.

11. Hay cuatro pilas de piedras, una con 6 piedras, dos con 8, y una con 9. Cinco jugadores numerados 1, 2, 3, 4 y 5 toman turnos, en el orden de sus números, eligiendo una de las pilas y dividiéndola en dos pilas más pequeñas. El perdedor es el jugador que no pueda hacer esto. Di cuál es el número del jugador que pierde.

12. El siguiente rectángulo está formado por nueve piezas cuadradas de diferentes tamaños. Suponga que cada lado del cuadrado E mide 7 cm. Halla el área (en cm^2) del rectángulo. R:



Parte B

1. Sea $v(X)$ la suma de los elementos de un conjunto de números X. Calcula la suma de todos los números $v(X)$ donde X es un subconjunto no vacío del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 16\}$.

2. Un subconjunto B de $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2016\}$ se dice *exacto* si para cada $x \in B$ la suma de los elementos de $B - \{x\}$ tiene la misma cifra de las unidades que x.

   a) Demuestra que no existe ningún subconjunto exacto de 405 elementos.

   b) Halla un subconjunto exacto de 400 elementos.

3. Si $\dfrac{a}{a^2+1} = \dfrac{1}{3}$, determina el valor de $\dfrac{a^3}{a^6+a^5+a^4+a^3+a^2+a+1}$.

Soluciones a la prueba individual.

4.1. Nivel I.

1. Notemos que el octavo número debe ser 4 ya que $2 \times (8+4) = 2 \times 12 = 24$. Por tanto, podemos calcular los restantes números siguiendo las condiciones del problema:

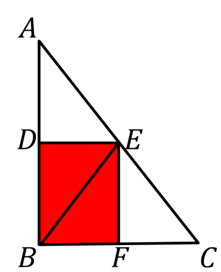
Lugar	7°	8°	9°	10°	11°
Número	8	4	24	56	160

   Por tanto la respuesta es 160.

2. Por cada once números naturales consecutivos, exactamente uno de ellos es un múltiplo de 11. Como $20130 = 11 \times 1830$, tenemos 1830 múltiplos del once en el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 20130\}$. A estos múltiplos hay que restarle los 8 que aparecen en el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 98\}$. Hay pues $1830 - 8 = 1822$ múltiplos. La respuesta es 1822.

3. Si la mitad de los animales son cabras entonces la otra mitad son vaca y ovejas.Así habrán $7 + 8 = 15$ cabras y por tanto el granjero necesita comprar $15 - 6 = 9$ cabras. La respuesta es 9.

4. Notemos que el triángulo ABC se divide en cuatro triángulos congruentes y el rectángulo $DEFB$ está formado por dos de ellos.



   Por tanto su área es igual a la mitad del área del triángulo ABC, es decir, $48/2 = 24$. La respuesta es 24.

5. Notemos que la figura n está formada por un cudrado con $(n+1)\times(n+1)$ puntitos y un triángulo con $1+2+3+\cdots+n = n \times (n+1)/2$ puntitos. Por tanto la figura 9 tendrá

$$10 \times 10 + \frac{10 \times 9}{2} = 100 + 45 = 145$$

   puntitos. La respuesta es 145.

6. Procedamos por casos. Si la llave está en la caja 1, entonces (c) y (d) serían verdaderas, lo cual contradice la hipótesis. De manera similar, si la llave está en la caja 2, entonces (b) y (d) serían verdaderas simultáneamente. Si la llave está en la caja 3, (a) y (c) serían verdaderas. Por tanto, la llave tiene que estar en la caja 4, con lo que únicamente la opción (a) es verdadera.

7. La suma de los números en un dado es $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)/2 = 6 \times 7/2 = 21$. Por tanto, en 8 dados la suma es $8 \times 21 = 168$. La suma de las 17 caras visibles es 43, por tanto las caras restantes suman $168 - 43 = 125$. La respuesta es 125.

8. Observemos primero que en $\triangle ABC$ tenemos $\angle CAB + \angle CBA = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$. De manera similar, en $\triangle APB$ tenemos que

$$\angle APB = 180^\circ - \angle PAB - \angle PBA = 180^\circ - \frac{\angle CAB}{2} - \frac{\angle CBA}{2}$$

ya que AP y BP son bisectrices. Por tanto

$$\angle APB = 180^\circ - \frac{\angle CAB + \angle CBA}{2} = 180^\circ - \frac{144^\circ}{2} = 108^\circ.$$

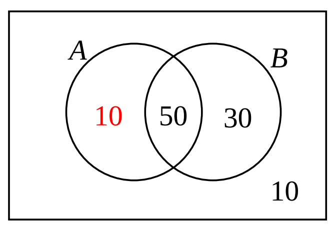
La respuesta es 108°.

9. Notemos que la base de cada uno de los rectángulos congruentes es igual a 3 veces su altura. Por tanto el segmento BC equivale a 3 veces la altura de uno de estos rectángulos y AB equivale a 5 veces dicha altura. Así tenemos que $AB/BC = 5/3$. La respuesta es $5/3$.

10. Consideremos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{personas que les gustan las matemáticas}\}, \\ B &= \{\text{personas que dicen la verdad}\}. \end{aligned}$$

Entonces, de acuerdo a las condiciones del problema, tenemos el siguiente diagrama de Venn



Por tanto la respuesta es 10.

11. Considerando las proporciones que indica el problema (o bien, usando una regla de tres), deducimos que la cuenta de Drini fue de $50 \times 100/4 = 1250$ y la de Deeds fue $50 \times 100/10 = 500$. Así que el total es $1250 + 500 = 1750$. La respuesta es 1750.

12. Al descomponer 810 en primos obtenemos $810 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$. Es inmediato entonces que 5 es uno de los dígitos buscados, ya que cualquier otro múltiplo de 5 tiene al menos dos cifras. Ahora notemos que 2 no puede ser otro de los dígitos, ya que en ese caso habría dos dígitos iguales a 9. En consecuencia, el único múltiplo de 2 que puede aparecer es $2 \times 3 = 6$ y los restantes dos dígitos serán 3 y $3 \times 3 = 9$. Luego, la suma de los dígitos es $3 + 5 + 6 + 9 = 23$. La respuesta es 23.

13. Denotemos por P y R a las áreas totales del pentágono y el rectángulo, respectivamente. Entonces, por las condiciones del problema tenemos que

$$\frac{3}{16} \times P = \frac{2}{9} \times R$$

y en consecuencia

$$P = \frac{16}{3} \times \frac{2}{9} \times R = \frac{32}{27} \times R.$$

Por tanto

$$A = \frac{13}{16} \times \frac{32}{27} \times R = \frac{26}{27} \times R, \qquad C = \frac{7}{9} \times R$$

y entonces

$$\frac{A}{C} = \frac{26/27\ R}{7/9\ R} = \frac{26}{21}.$$

La respuesta es 47.

14. Consideremos la descomposición en primos del número $N = 5^8 + 2 \times 5^9$. Para ello notemos que

$$N = 5^8 \times (1 + 2 \times 5) = 5^8 \times 11.$$

Cada divisor de N se forma considerando una potencia de 5 y una potencia de 11. Existen 9 opciones para la potencia de 5 (desde 0 hasta 8) y 2 opciones para la potencia de 11 (0 y 1). Por tanto hay $9 \times 2 = 18$ divisores. En la siguiente tabla se presentan todos los divisores:

$5^0 = 1$	5^1	5^2	5^3	5^4	5^5	5^6	5^7	5^8
$5^0 \times 11$	$5^1 \times 11$	$5^2 \times 11$	$5^3 \times 11$	$5^4 \times 11$	$5^5 \times 11$	$5^6 \times 11$	$5^7 \times 11$	$5^8 \times 11$

La respuesta es 18.

15. Consideremos el siguiente arreglo, donde cada A representa la posición que ocupa una niña.

*	A	*	A	*	A	*	A	*	A	*	A	*

De los 7 lugares marcados con un asterisco, escogemos 5 donde se ubicarán los niños. Observemos que por la forma en que está distribuido el arreglo, entre cada pareja de niños habrá al menos una niña. Finalmente, notemos que las niñas se pueden permutar de 6! maneras y los niños de 5! maneras. Por tanto, el número total de formas es

$$\binom{7}{5} \times 6! \times 5! = \frac{7!}{5! \times 2!} \times 6! \times 5! = \frac{7! \times 6!}{2}$$

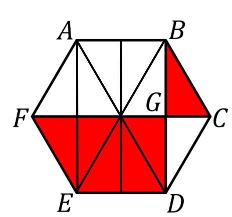
La respuesta es $7!/2 = 2520$.

4.2. Nivel II.

Parte A

1. Calculemos primero la cantidad total de números de cuatro cifras que se pueden formar con $2, 2, 3, 5$. Primero acomodamos los 2's, lo cual puede hacerse de $\binom{4}{2} = 6$ maneras. Luego, en alguno de los 2 espacios restantes acomodamos el 3, quedando el 5 determinado. Por tanto, hay $6 \times 2 = 12$ números. Ahora bien, para que la suma del primer y último dígito sea para, ambos deben tener la misma paridad, es decir, ambos son 2 o bien uno es 3 y el otro 5. Solo hay 4 de estos números: 2352, 2532, 3225,5223. En cosecuencia la probabilidad buscada es $4/12 = 1/3$. La respuesta es $1/3$.

2. Notemos que el hexágono se divide en 12 triángulos congruentes a $\triangle BCG$.

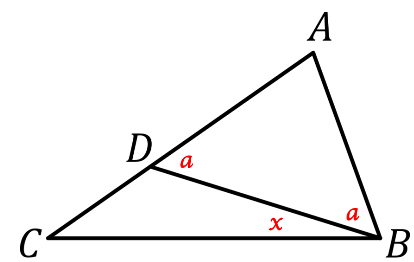


El cuadrilátero $FEDG$ está formado por 5 de estos triángulos. La respuesta es 5.

3. Los mismos 60 hombres completarán los $2/3$ restantes del trabajo en $2 \times 18 = 36$ días, es decir, el triple del tiempo requerido. Por tanto se necesitaría el triple de hombres para hacer el trabajo tres veces más rápido. Se necesitan pues $60 \times 3 = 180$ hombres, por lo que es necesario contratar $180 - 60 = 120$ hombres más. La respuesta es 120.

4. Hay 4! palabras que empiezan con A. De manera similar, hay 4! palabras que empiezan con M y con R. Ahora bien, hay 3! palabras que empiezan con SA. Finalmente, notemos que SMART es la primera palabra que emieza con SM. Por tanto, SMART ocupa el lugar $3 \times 4! + 3! + 1 = 79$. La respuesta es 79.

5. Sean $x = \angle CBD$ y $a = \angle ADB = \angle ABD$. Entonces por el teorema del ángulo externo aplicado a $\triangle DCB$ tenemos que $\angle ACB = a - x$. Por tanto
$$\angle ABC - \angle ACB = (a + x) - (a - x) = 2x.$$



Por tanto, $x = (\angle ABC - \angle ACB)/2 = 22{,}5°$. La respuesta es 22,5°.

6. Observemos que $1 + 2 + \cdots + 100 = 100 \times 101/2 = 5050$ y $1 + 2 + \cdots + 101 = 101 \times 102/2 = 5151$. Por tanto Juan contó los primeros 100 enteros positivos y el número que está de más es 3. La respuesta es 3.

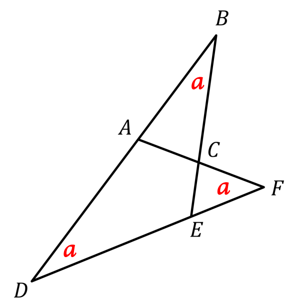
7. Por las leyes de los exponentes tenemos que $(n^2)^{100} < (5^3)^{100}$. Por tanto $n^2 < 125$ y el mayor entero positivo que cumple la condición es $n = 11$. La respuesta es 11.

8. Primero observemos que $\triangle ADE$ y $\triangle ADC$ comparten la misma altura y por tanto
$$\frac{AE}{AC} = \frac{\text{Área}\,(\triangle ADE)}{\text{Área}\,(\triangle ADC)} = \frac{1}{5}.$$
Por el teorema de Tales tenemos que $\triangle ADE$ y $\triangle ABC$ son semejantes. Entonces
$$\frac{\text{Área}\,(\triangle ADE)}{\text{Área}\,(\triangle ABC)} = \left(\frac{AE}{AC}\right)^2 = \frac{1}{25}.$$
De aquí podemos concluir que Área $(\triangle ABC) = 25$. Finalmente,
$$\text{Área}\,(\triangle DBC) = \text{Área}\,(\triangle ABC) - \text{Área}\,(\triangle ADC) = 25 - 5 = 20.$$
La respuesta es 20.

9. Factorizando obtenemos
$$a^2 + 2ab - 3b^2 = (a + 3b)(a - b) = 41.$$
Como 41 es primo y $a + 3b > a - b$ tenemos que
$$\begin{aligned} a + 3b &= 41, \\ a - b &= 1. \end{aligned}$$
Resolviendo el sistema obtenemos $a = 11$, $b = 10$ y por tanto $a^2 + b^2 = 221$. La respuesta es 221.

10. Notemos que
$$2^8 + 2^{11} + 2^n = 2^8(1 + 2 \cdot 2^2 + 2^{n-8}).$$
Tomando $n - 8 = 4$ obtenemos el cuadrado perfecto $2^8 \cdot 5^2 = 80^2$. Finalmente la expresión $9 + 2^k$ no es un cuadrado perfecto para $k < 4$. Por tanto el mínimo valor buscado es $n = 12$. La respuesta es 12.

11. Sea $a = \angle ABC = \angle ADF = \angle AFD$. Notemos que $\angle BAC = (180^\circ - a)/2$. Por otro lado, aplicando el teorema del ángulo externo a $\triangle ADF$ obtenemos
$$\frac{180^\circ - a}{2} = 2a.$$



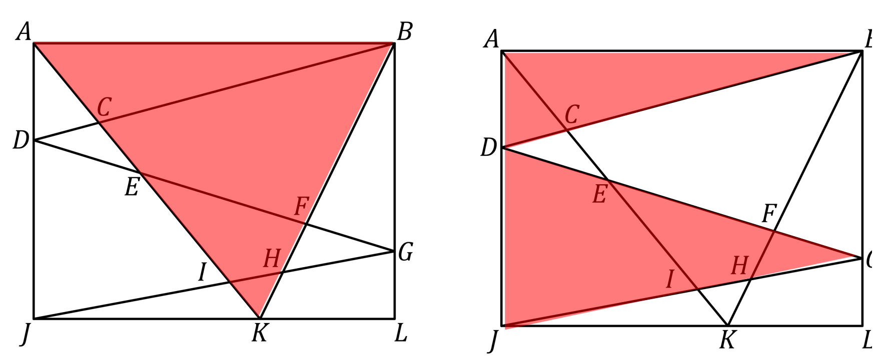
Resolviendo esta ecuación se obtiene $a = 36^\circ$ y $\angle BED = 180^\circ - 2a = 108^\circ$. La respuesta es 108°.

12. Multiplicando cada una de las ecuaciones por c, a y b, respectivamente, y reordenando obtenemos
$$\begin{aligned} 3abc &= ac + bc \\ 4abc &= ab + ac \\ 5abc &= bc + ba. \end{aligned}$$
Sumando estas ecuaciones obtenemos $12abc = 2(ab + bc + ca)$. Así
$$\frac{24abc}{ab + bc + ca} = 4.$$
La respuesta es 4.

Parte B

1. Debido a las condiciones del problema, e es el mayor elemento del conjunto $X = \{a, b, c, d, e\}$. Como cada elemento de X puede calcularse en términos de e, tenemos que k será lo menor posible exactamente cuando e lo sea. Mas áun, las condiciones del problema implican que 2, 3, 4 y 5 dividen a e y en consecuencia $[2, 3, 4, 5]$ divide a e. Por tanto, $[2, 3, 4, 5] = 60$ es el menor valor posible para e. De aquí concluimos que $a = 12$, $b = 15$, $c = 20$, $d = 30$ y entonces $k = 522$.

2. Denotemos por $[XYZ]$ el área del polígono XYZ. Primero notemos que
$$[ABK] = \frac{[ABLJ]}{2} = [ABD] + [DGJ].$$



Luego
$$[ABC] + [BCEF] + [EFHI] + [HIK] = [ABC] + [ACD] + [DEIJ] + [EFHI] + [FGH].$$
Por tanto
$$\begin{aligned} [HIK] &= [ACD] + [DEIJ] + [FGH] - [BCEF] \\ &= 22 + 482 + 22 - 500 \\ &= 26. \end{aligned}$$

3. Reagrupando y factorizando obtenemos
$$n^3 + 2016 = n^3 + 26^3 - (26^3 - 2016) = (n + 26)(n^2 - 26n + 26^2) - 15560$$
y por tanto
$$\frac{n^3 + 2016}{n + 26} = n^2 - 26n + 26^2 - \frac{15560}{n + 26}$$
De aquí podemos concluir que buscamos el mayor valor de n tal que $n+26$ divida a 15560. Por tanto $n = 15560-26 = 15534$.

4.3. Nivel III.

Parte A

1. La suma buscada es
$$N = 8 + 16 + 24 + \cdots + 8000 = 8(1 + 2 + 3 + \cdots + 1000) = 4 \times 1000 \times 1001 = 4 \times 1,001,000.$$
Por otro lado $1000^2 = 1,000,000$ y $1001^2 = 1,002,001$. Por tanto, 1000×1001 está más cerca de 1000^2 que de 1001^2. De aquí podemos concluir que el entero más cercano a $\sqrt{N}$ es $2 \times 1000 = 2000$. La respuesta es 2000.

2. Notemos que $\angle PRQ = 180° - 125° = 55°$. Aplicando el teorema del ángulo externo a $\triangle PQR$ tenemos $\angle APN = a + 55°$. Entonces tenemos
$$180° = \angle PAN + \angle APN + \angle PNA = 55° + (a + 55°) + b.$$
Por tanto, $a + b = 180° - 110° = 70°$. La respuesta es 70°.

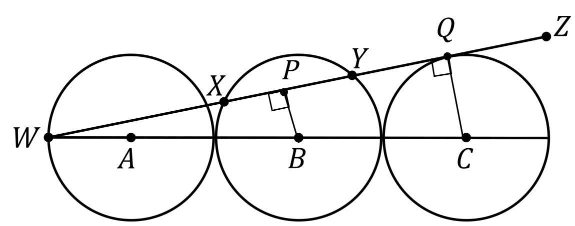
3. Factorizando obtenemos $(z-1)(z^2+z+1) = 0$. Como $z \neq 1$, entonces tenemos que $z^2+z+1 = 0$. Dividiendo entre z y reagrupando obtenemos $z + 1/z = -1$ y en consecuencia
$$z + \frac{1}{z} + 4 = -1 + 4 = 3.$$
La respuesta es 3.

4. Sean x la edad que tenía Jorge y y su edad actual. Entonces Lalo tiene $2x$ años de edad. Por esto, de acuerdo con el problema, Lalo tenía y años de edad cuando Jorge tenía x años de edad. Como la diferencia entre las edades de Lalo y Jorge siempre es la misma, tenemos
$$2x - y = y - x.$$
Se sigue que $3x = 2y$, por lo tanto, $y = 3x/2$. Entonces, por la diferencia de edades tenemos
$$y - x = \frac{3}{2}x - x = \frac{1}{2}x.$$
Concluimos que Lalo es $x/2$ años mayor que Jorge. Cuando Jorge tenga $2x$ años de edad, Lalo tendrá $5x/2$ años. De acuerdo al problema, $2x + 5x/2 = 63$, por lo tanto $9x/2 = 63$, de donde $x = 14$. Así, Lalo tiene 28 años y Jorge tiene 21 años.

5. Ya que Área $(\triangle ABC) = 30$ y $AB = 6$ entonces tenemos que la altura $h = 10$. Por otro lado, notemos que $\triangle ABE$ y $\triangle CDE$ son semejantes ya que AB y CD son paralelas. Más aún, la razón de semejanza es $CD/AB = 15/6 = 5/2$. Si denotamos por x a la altura de $\triangle ABE$, entonces tenemos que la altura de $\triangle CDE$ es $5x/2$. Por tanto tenemos
$$10 = h = \frac{5}{2}x + x = \frac{7}{2}x.$$
Así
$$\text{Área}\,(\triangle AEB) = \frac{AB \cdot x}{2} = \frac{6 \cdot 20/7}{2} = \frac{60}{7}.$$
La respuesta es 60/7.

6. El número total de posibles resultados el 6^6. Por otro lado, para hallar los resultados cuya suma es 10 usamos el método de separadores. Si denotamos por $1 + x_i$ el resultado del dado i, entonces buscamos las soluciones enteras de
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 4$$
con $0 \leq x_i \leq 5$. El número total de soluciones es $\binom{9}{5}$. Por tanto la probabilidad es $\binom{9}{5}/6^6 = 126/6^6$. La respuesta es $\binom{9}{5}/6^6 = 126/6^6$.

7. Sea P el punto medio del segmento XY y Q el punto de tangencia en la tercera circunferencia. Entonces tenemos que BP y CQ son perpendiculares a XY y en consecuencia $\triangle PWB$ y $\triangle QWC$ son semejantes.



Entonces $PB/QC = WB/WC$ y por tanto
$$PB = \frac{QC \cdot WB}{WC} = \frac{20 \cdot 60}{100} = 12.$$
Finalmente, por el teorema de Pitágoras tenemos que
$$XP = \sqrt{XB^2 - PB^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16.$$
Así $XY = 2XP = 32$. La respuesta es 32.

8. Sea S la suma buscada. Usemos la descomposición
$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$
para expresar S como una suma telescópica:
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\times 3} - \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{3\times 4} - \frac{1}{4\times 5} + \cdots \frac{1}{14\times 15} - \frac{1}{15\times 16}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\times 3} - \frac{1}{15\times 16}\right) = \frac{13}{160}. \end{aligned}$$
Por tanto $m + n = 13 + 160 = 173$. La respuesta es 173.

9. Reordenando obtenemos la expresión
$$a+1+\frac{1}{a+1}=b-1+\frac{1}{b-1}.$$
Por comodidad tomamos $x=a+1$ y $y=b-1$. Entonces $x+1/x=y+1/y$ y en consecuencia
$$x-y=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{x-y}{xy}.$$
Dado que $x-y=a-b+2\neq 0$ podemos concluir $1=1/xy$. Así $ab-a+b=(a+1)(b-1)+1=xy+1=2$. La respuesta es 2.

10. Notemos que $\triangle ABC$ y $\triangle FAB$ comparten la base AB y tienen la misma área. Por tanto, tienen la misma altura y como consecuencia AB y FC son paralelas. De manera análoga tenemos que ED y CF son paralelas. Repitiendo este proceso con las tres parejas de lados opuestos del hexágono, obtenemos que EF, AD y BC son paralelas, al igual que AF, BE y CD. Así tenemos que los cuadriláteros $OFED$, $ODCB$ y $OBAF$ son paralelogramos. Más aún, cada uno de ellos está formado por dos triángulos de área 2. Por tanto, el hexágono tiene área $2\times 6=12$. La respuesta es 12.

11. Notemos que inicialmente tenemos 4 pilas de piedras y al final hay $6+8+8+9=31$ pilas (de una piedra cada una). Después de cada turno, el número de pilas aumenta en uno, así que el juego termina después de $31-4=27$ turnos. Por tanto el jugador 2 es el último en efectuar un turno, por lo que el perdedor es el jugador 3. La respuesta es 3.

12. Denotemos por $\overline{X}$ la longitud del lado del cuadrado X. Abordamos este problema tratando de describir las longitudes de los cuadrados en términos de la menor cantidad posible de variables. Si tomamos $x=\overline{H}$ y $y=\overline{D}$ entonces tenemos
$$\overline{A}=3x+2y+7,\qquad \overline{B}=x+14,\qquad \overline{C}=3x+y+7,$$
$$\overline{E}=7,\qquad \overline{F}=x+7,\qquad \overline{G}=3x+7,\qquad \overline{I}=2x+7.$$
Ahora procedemos a calcular la longitud de cada lado del rectángulo de dos maneras diferentes. Entonces obtenemos las condiciones
$$\begin{aligned}\overline{A}+\overline{B} &= \overline{C}+\overline{G}+\overline{I},\\ \overline{A}+\overline{C} &= \overline{B}+\overline{F}+\overline{I},\end{aligned}$$
que después de simplificar se tansforman en el sistema
$$\begin{aligned}y &= 4x,\\ 2x+3y &= 14,\end{aligned}$$
cuya solución es $x=1$, $y=4$. Entonces el área del rectángulo es $32\times 33=1056$. La respuesta es 1056.

Parte B

1. Sea $A=\{1,2,3,\ldots,16\}$. Fijémonos en un valor fijo $1\leq k\leq 16$. Si consideramos cualquier subconjunto de $A_k=A-\{k\}$ y le añadimos el elemento k obtenemos un subconjunto de A que sí contiene a k. Recíprocamente, si a cada subconjunto de A que contiene a k le quitamos este elemento, se obtiene un subconjunto de A_k. Por tanto, hay tantos subconjuntos de A que contienen a k como subconjuntos de A_k, y de estos últimos hay claramente 2^{15}. Esto quiere decir que cuando consideremos todas las sumas $v(X)$, el número k aparece exactamente 2^{15} veces. Por tanto
$$\sum_{X\subset A} v(X)=2^{15}\cdot 1+2^{15}\cdot 2+2^{15}\cdot 3+\cdots+2^{15}\cdot 16=2^{15}(1+2+3+\cdots+16)=2^{18}\cdot 17.$$

2. *a*) Procedamos por contradicción. Supongamos pues que hay 405 números $a_1, a_2, \ldots, a_{405}$ que cumplen $S - a_i \equiv a_i \pmod{10}$ donde $S = a_1 + \cdots + a_{405}$. Sumando estas 405 congruencias obtenemos $403S \equiv 0 \pmod{10}$ y por tanto $S \equiv 0 \pmod{10}$. Así tenemos $2a_i \equiv 0 \pmod{10}$ y por tanto $a_i \equiv 0 \bmod 5$. Pero no hay 405 multiplos positivos de 5 menores o iguales a 2016.

   b) Consideremos el conjunto formado por todos los múltiplos de 5 entre 5 y 2000 inclusive: $B = \{5, 10, \ldots, 2000\}$. Este es un conjunto de 400 elementos tal que $S \equiv 0 \pmod{10}$. Por tanto, si retiramos un número k que termina en 5 entonces $S - k$ también termina en 5. Análogamente, si k termina en 0, entonces $S - k$ termina en 0 también. Esto demuestra que B es exacto.

3. **Sol:** La condición del problema puede escribirse como $a^2 + 1 = 3a$, o equivalentemente como

$$a^2 + a + 1 = 4a$$

y entonces tenemos

$$a^6 + a^5 + a^4 = a^4(a^2 + a + 1) = a^4(4a) = 4a^5.$$

Por otro lado,

$$a^4 + 1 = (a^2 + 1)^2 - 2a^2 = (3a)^2 - 2a^2 = 7a^2.$$

Así

$$\begin{aligned} a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 &= 4a^5 + a^3 + 4a \\ &= 4a(a^4 + 1) + a^3 \\ &= 4a(7a^2) + a^3 \\ &= 29a^3. \end{aligned}$$

Finalmente

$$\frac{a^3}{a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1} = \frac{a^3}{29a^3} = \frac{1}{29}.$$

Prueba por equipos.

Instrucciones: Los problemas de la Prueba por Equipos están enlistados por orden de dificultad, pero cada uno vale lo mismo (40 puntos). Para los problemas 1, 3, 5 y 7 sólo se tomará en cuenta el resultado final y no se otorgarán puntos parciales. Los problemas 2, 4, 6 y 8 requieren una solución completa y se podrán otorgar puntos parciales. La duración del examen es de 70 minutos, que se distribuirá de la siguiente manera:

(i) Durante los primeros 10 minutos, todos los integrantes del equipo podrán discutir y distribuirse entre ellos los primeros 6 problemas, de manera que cada miembro del equipo resuelva al menos un problema.

(ii) Durante los siguientes 35 minutos, cada participante trabajará individualmente en los problemas que se le asignaron.

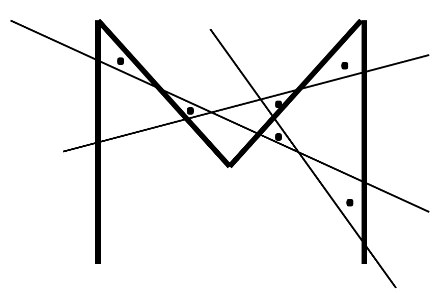
(iii) Durante los últimos 25 minutos todos los miembros del equipo trabajarán en la solución de los últimos dos problemas.

5.1. Nivel I.

1. El botón “4” de mi calculadora está estropeado, así que no puedo escribir números que contengan el dígito 4. Más aún, mi calculadora tampoco muestra el dígito 4 si 4 es parte de la respuesta. Por esto no puedo escribir la cuenta 2×14. También, el resultado de multiplicar 3 por 18 se muestra como 5 en vez de 54 y el resultado de multiplicar 7×7 se muestra como 9 en vez de 49. Si multiplico un entero positivo de solo un dígito, por un positivo de dos dígitos en mi calculadora y ésta muestra 26, ¿cuántas posibilidades pude haber multiplicado?

2. Sea $m = 76^{2016} - 76$. Halla el residuo cuando m es dividido entre 100.

3. Deeds atraviesa la letra M con tres rectas y obtiene exactamente 6 triángulos, como lo indica la figura. Drini atraviesa la letra M con tres rectas y obtiene exactamente 9 triángulos. Dibuja una posible manera en que Drini pudo hacer esto.



4. Sean p y q dos primos consecutivos. Para algún entero fijo n, el conjunto $\{n-1, 3n-19, 38-5n, 7n-45\}$ representa $\{p, 2p, q, 2q\}$, pero no necesariamente en ese orden. Encuentre el valor de n

5. Ricardo tiene un jardín en forma de cuadrícula y en cada casilla una flor, como se muestra en la figura. Su esposa corta 12 flores para poner en un florero y Ricardo observa que en cada renglón y columna de su jardín quedaron plantadas exactamente la misma cantidad de flores. Dibuja una de las posibles maneras en que la esposa de Ricardo pudo haber cortado las flores.

*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*

6. El conjunto $\{7, 83, 421, 659\}$ tiene las siguientes propiedades:

   a) Todos sus elementos son números primos.

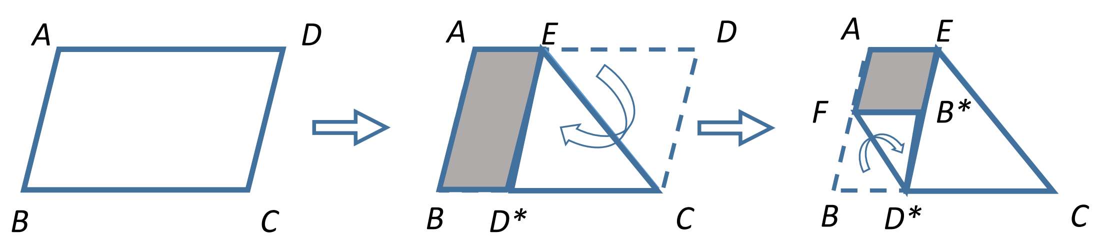
   b) Al considerar todas las cifras que los conforman, aparecen todos los dígitos (excepto el 0) exactamente una vez.

   Encuentra el conjunto con estas dos propiedades y que además la suma de sus elementos sea mínima.

7. En la siguiente cuadrícula se escriben todos los números del 1 al 9 (sin repetir) de modo que la sumas de los tres números en cada renglón, columna o diagonal principal sea diferente. Luis ya puso el 1 y el 5 como se muestra en la figura. Termina de acomodar los restantes números.

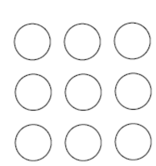
1		
		5

8. Un paraleogramo de papel se dobla desde la esquina superior derecha (D) como lo muestra la figura, de modo que la región sombreada tiene 3/8 del área del paralelogramo original. A continuación, se vuelve a doblar sobre la esquina inferior izquierda (B) como lo muestra la figura. ¿A qué porción del área del paralelogramo original corresponde la región sombreada de la última figura?



5.2. Nivel II.

1. El siguiente dibujo representa 9 mesas de una sala de fiestas. Se tienen 3 manteles verdes, 3 blancos y 3 rojos para poner sobre las mesas. ¿De cuántas maneras se pueden colocar los manteles de manera de que no hayan manteles del mismo color en cada renglón o columna?



2. Hugo le dice a Lalo: "ya verifiqué en mi calculadora que solamente una de las siguientes parejas (x, y) da como resultado un entero positivo al calcular $\sqrt{x^2 + y^2}$". ¿Cuál es esa pareja?

   a) $x = 25530$, $y = 29464$;

   b) $x = 37615$, $y = 26855$;

   c) $x = 15123$, $y = 32477$;

   d) $x = 28326$, $y = 28614$;

   e) $x = 22536$, $y = 27462$.

3. Encuentre la parte entera de

$$\frac{1}{\frac{1}{2010}+\frac{1}{2011}+\frac{1}{2012}+\frac{1}{2013}+\frac{1}{2014}+\frac{1}{2015}+\frac{1}{2016}}.$$

4. Sea ABC un triángulo acutángulo con $BC > CA$. Sean P, Q las intersecciones de la mediatriz del segmento AB con las rectas BC y CA, respectivamente. Sean R el pie de la perpendicular desde P a CA y S el pie de la perpendicular desde Q a BC. Demuestra que S, R y el punto medio de AB son colineales.

5. El siguiente dibujo representa un mapa del juego *buscaminas*. En 10 de los cuadritos hay una bomba. En los cuadritos marcados, los números indican cuántas bombas hay en los cuadritos junto a él (es decir, los cuadritos con los que comparte un lado o una esquina). Además, en los cuadritos marcados se sabe que no hay bombas. Indica en el diagrama con una X la ubicación de los 10 cuadritos que contienen bombas.

		1				1	
1				3			
		4				3	
1				1			2
	1		1				
					1		
	2						
			3		1		

6. Halla el entero positivo más grande que divide a todos los números de la forma

$$(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)(2n+9),$$

donde n es un entero positivo.

7. Dos grupos de olímpicos organizan un torneo de tenis, donde cada participante de cada uno de los grupos juega partidos contra todos los participantes del otro grupo. El día del torneo dos participantes estaban enfermos (uno de cada grupo), por lo que no pudieron asistir. Al final el número de partidos sin esos dos jugadores resultó 20 % menor que si hubieran asistido. Encuentra todos los posibles valores del número total de jugadores que participaron en el torneo.

8. Sea p un número primo tal que $2p$ es la suma de los cuadrados de cuatro enteros consecutivos. Demuestra que 36 divide a $p - 7$.

5.3. Nivel III.

1. Calcule $\sqrt[3]{77-20\sqrt{13}}+\sqrt[3]{77+20\sqrt{13}}$.

2. Si $|x| + x + 5y = 2$ y $|y| - y + x = 7$, encuentre el valor de $x + y + 2016$.

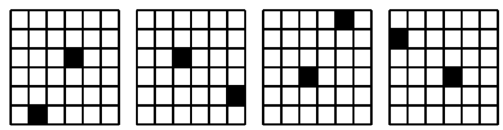
3. Sea n un número de 5 cifras. Denotemos por q y r al cociente y residuo que se obtienen al dividir n entre 100. ¿Para cuántos valores de n se tiene que $q + r$ es un múltiplo de 11?

4. Uge olvidó la clave para desbloquear su teléfono, pero recuerda que tiene 5 cifras distintas. Así que intentó con las siguientes claves: 40876, 23497, 15472 y 75604. En su primer intento exactamente dos números de su clave aparecen, pero en un lugar equivocado. En el segundo intento exactamente dos números coinciden con su clave. En el tercer intento exactamente un número coincide con su clave. En el cuarto intento exactamente un número de su clave aparece, pero en el lugar equivocado. Con esta información, ¿Puede Uge saber a ciencia cierta cuál es su clave? En caso afirmativo, escribe la clave de Uge. En caso negativo, explica por qué.

5. Sobre una mesa se encuentran tres pelotas de radio 1 y tangentes entre si. Sobre ellas se asienta una pelota de radio 2. ¿A que altura sobre la mesa se halla el centro de la pelota grande?

6. Sean a y b enteros positivos con $a > b > 2$. Demuestre que $\dfrac{2^a+1}{2^b-1}$ nunca es un entero.

7. Deeds tiene un tablero blanco de 6×6 y desea pintarle dos casillas de negro. Dos coloraciones que difieran en una rotación se consideran equivalentes, por ejemplo, las cuatro coloraciones que se ilustran en la figura son todas equivalentes:



   ¿De cuántas maneras no equivalentes puede Deeds pintar su tablero?

8. Los puntos K y N se toman en los lados AB y AC de $\triangle ABC$, respectivamente, de manera que $KB = KN$. La bisectriz de $\angle ACB$ interseca al circuncírculo de $\triangle ABC$ en el punto R. La perpendicular de R a la recta AB interseca al segmento BN en D. Demuestra que los puntos A, K, D, N son concíclicos.

Soluciones a la prueba por equipos.

9.1. Nivel I.

1. Por las condiciones del problema, el resultado es un número de a lo más tres dígitos. Por tanto, las únicas posibilidades son 26, 426, 246 y 264. Procedemos ahora a expresar cada uno de estos enteros como el producto de un número de un dígito y un número de dos dígitos:

$$\begin{aligned} 26 &= 1 \times 26 = 2 \times 13, \\ 426 &= 6 \times 71, \\ 246 &= 3 \times 82 = 6 \times 41, \\ 264 &= 3 \times 88 = 4 \times 66 = 6 \times 44 = 8 \times 33. \end{aligned}$$

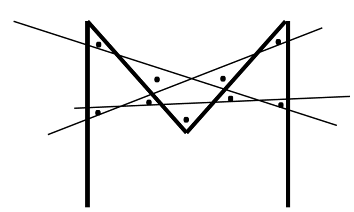
   Analizando estas 9 opciones, vemos que 6×41, 4×66 y 6×44 no pueden efectuarse ya que involucran presionar el botón 4 de la calculadora. Por tanto, solo tenemos 6 opciones posibles.

2. Factorizando obtenemos

$$m = 76(76^{2015} - 1) = 76(76 - 1)(76^{2014} + 76^{2013} + \cdots + 76 + 1) = (76 \cdot 75)N = 5700N$$

   Por tanto, m termina en 00, es decir, su residuo al dividirse entre 100 es 0.

3. Existen muchas formas de lograrlo. Aquí presentamos una de ellas:



4. Sumando todos los elementos de cada conjunto obtenemos $3p+3q = 6n-27$, o bien, $p+q = 2n-9$. Como $2n-9$ es impar entonces podemos afirmar que p y q tienen distinta paridad, y por tanto uno de ellos es 2. Si tomamos $p = 2$ entonces obtenemos $q = 3$ y $n = 7$.

5. Notemos que los números 4, 6 y 8 no pueden aparecer como dígitos de las unidades de ninguno de los números primos. Por tanto la suma de ellos debe ser al menos

$$40 + 60 + 80 + 1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 9 = 207.$$

   Por otro lado, los números $41, 67, 89, 2, 3, 5$ satisfacen $41 + 67 + 89 + 2 + 3 + 5 = 207$. Así tenemos que 207 es el mínimo valor de la suma.

6. Como se quitaron 12 flores, entonces cada columna o renglón debe tener exactamente 4 flores. Existen muchos acomodos posibles. Este es un ejemplo:

*		*	*	*	
		*	*	*	*
*	*	*			*
*	*		*		*
*	*			*	*
	*	*	*	*	

7. Existen muchas formas distintas de llenar la cuadrícula siguiendo las condiciones del problema. Una manera sencilla de hacerlo es notar que las 4 sumas que contienen al cuadrito central deben sumar distinto y por lo tanto, debemos encontrar 4 parejas de números que sumen distinto. Como $1+5=6$, si consideramos las parejas $\{2,6\}$, $\{3,7\}$ y $\{4,8\}$ satisfacen estas condiciones. El siguiente acomodo satisface:

1	2	3
4	9	8
7	6	5

8. Notemos que los paralelogramos $ABCD$ y ABD^*E comparten la base AB. Por tanto, la razón de sus áreas es igual a la razón de sus alturas, la cual a su vez es igual a la razón de sus lados. Por tanto, $BD^*/BC = 3/8$ y así $BD^*/D^*C = 3/5$. Por el mismo razonamiento, ahora aplicado al segundo doblez, tenemos que

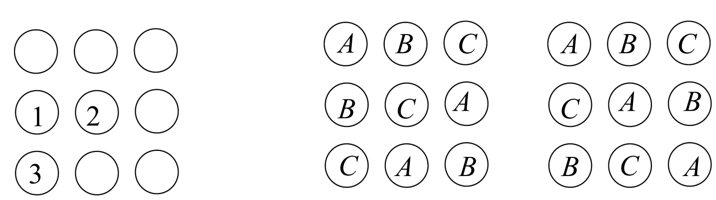
$$\frac{\text{Área}\,(AFB^*E)}{\text{Área}\,(ABD^*E)} = \frac{EB^*}{ED^*}$$

Por otro lado, debido a que al hacer el doblez los lados coinciden, tenemos que $DC = ED^*$ y $BD^* = B^*D^*$. Por tanto tenemos que $EB^*/ED^* = 2/5$. Así

$$\frac{\text{Área}\,(AFB^*E)}{\text{Área}\,(ABCD)} = \frac{\text{Área}\,(AFB^*E)}{\text{Área}\,(ABD^*E)} \times \frac{\text{Área}\,(ABD^*E)}{\text{Área}\,(ABCD)} = \frac{2}{5}\times\frac{3}{8} = \frac{3}{20}.$$

9.2. Nivel II.

1. Consideremos las mesas marcadas como lo muestra la siguiente figura. Escojamos primero el color de la mesa marcada con el 1 y denotémoslo como A. Esto puede hacerse de 3 maneras distintas. A continuación, escogemos los colores de las mesas marcados con el 2 y 3. Aquí surgen dos casos: cuando los colores coincidan y cuando no sea así. En ambos casos, una vez que se escogen los colores de estas tres mesas, los restantes colores quedan determinados como lo indica la figura. Notemos que en cada uno de estos casos, la elección del color de la mesa 2 –que llamaremos B– determina el color de la mesa 3. Por tanto, hay $3\times 2 = 6$ posibles acomodos en cada caso, y por tanto $6+6=12$ acomodos en total.



Caso 1 Caso 2

2. Procederemos descartando casos. Para ello usaremos la siguiente tabla donde se analiza el último dígito en cada caso:

Caso	x^2	y^2	x^2+y^2
a)	0	6	6
b)	5	5	0
c)	9	9	8
d)	6	6	2
e)	6	4	0

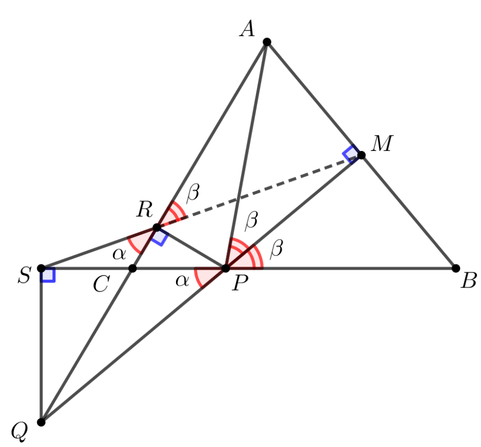
Como todo cuadrado perfecto debe terminar en 0, 1, 4, 6 o 9, inmediatamente podemos descartar los casos (c) y (d). Hacemos lo mismo, pero ahora considerando los dos últimos dígitos:

Caso	x^2	y^2	x^2+y^2
a)	00	96	96
b)	25	25	50
e)	96	44	40

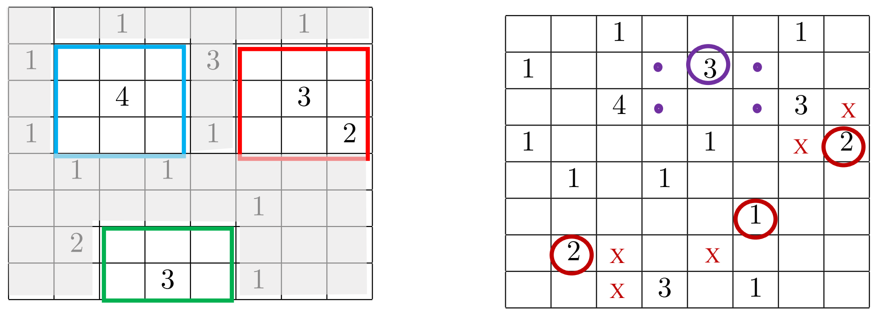
Ahora notemos que si un cuadrado perfecto es divisible entre 10 entonces también lo será entre $10^2 = 100$ y por tanto deberá tener sus dos últimas cifras iguales a 0. En base en esta observación podemos descartar los casos (b) y (e), así que la única opción posible es (a). De hecho, se cumple que $25530^2 + 29464^2 = 38986^2$.

3. Sea
$$S = \frac{1}{2010} + \frac{1}{2011} + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} + \frac{1}{2016}$$
Dado que $1/2016$ es el sumando más pequeno y $1/2010$ el sumando más grande que aparecen en S, entonces tenemos que
$$\frac{7}{2016} < S < \frac{7}{2010}.$$
En consecuencia
$$\frac{2010}{7} < \frac{1}{S} < \frac{2016}{7}.$$
Como
$$\frac{2010}{7} = 287 + \frac{1}{7}, \qquad \frac{2016}{7} = 288$$
entonces podemos concluir que
$$\left\lfloor \frac{1}{S} \right\rfloor = 287$$

4. Sea M el punto medio de AB. Notemos que el cuadrilátero $SQPR$ es cíclico, pues $\angle QSP = 90° = \angle QRP$. Así que $\angle SRQ = \angle SPQ$. Por otro lado, como $\angle PRA + \angle AMP = 90° + 90° = 180°$, el cuadrilátero $ARPM$ también es cíclico. De aquí que $\angle MRA = \angle MPA$. Además, $PA = PB$, pues P está sobre la mediatriz de AB. Por tanto, $\angle MPA = \angle BPM$. Dado que $\angle BPM = \angle SPQ$ por ser opuestos por el vértice, concluimos que $\angle SRQ = \angle MRA$, lo cual muestra que M, R y S son colineales.



5. Consideremos la siguiente figura



De acuerdo a la información provista, sabemos que en las casillas marcadas con rojo hay a lo más 3 bombas, lo mismo que en las casillas marcadas con verde, en tanto que en las casillas marcadas con azul hay al menos cuatro bombas. Por lo tanto, en la región gris no puede haber ninguna bomba. Fijándonos entonces en los números marcados con un círculo rojo, podemos encontrar directamente 5 posiciones en las que con seguridad hay una bomba. Finalmente, si nos fijamos en el número 3 marcado con un círculo morado, podemos garantizar que exactamente una de las 4 casillas marcadas con un punto estará vacía. Analizando los casos posibles llegamos a la única solución posible:

		1				1	
1			X	3	X		
	X	4	X			3	X
1		X		1		X	2
	1		1				
					1		
	2	X		X			
		X	3		1		

6. Notemos que los factores son cinco impares consecutivos. Por tanto, entre ellos hay al menos un factor de 3 y un factor de 5. Por tanto 15 divide al producto. Además, si tomamos $n = 1$, $n = 5$ y $n = 6$ entonces obtenemos los números $3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11$, $11 \times 13 \times 15 \times 17 \times 19$, $13 \times 15 \times 17 \times 19 \times 21$; cuyo máximo común divisor es 15. Por tanto, el número buscado es 15.

7. Sean m, n la cantidad de cada olímpicos en cada grupo con $m \geq n$. De acuerdo a las condiciones del problema tenemos que $(n-1)(m-1) = .8nm$, o de manera equivalente $5(n-1)(m-1) = 4mn$. Esta ecuación se reduce a

$$nm - 5n - 5m + 5 = 0.$$

Entonces

$$(n-5)(m-5) = nm - 5n - 5m + 25 = 20.$$

Por lo tanto tenemos que se cumple alguna de las siguientes relaciones

$n-5$	20	10	5
$m-5$	1	2	4

Luego

n	25	15	10
m	6	7	9

Así $m + n$ puede tomar los valores 31, 22 o 19.

8. Denotemos por $n-1, n, n+1, n+2$ a los números consecutivos. Entonces

$$(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 4n^2 + 4n + 6.$$

Por lo tanto tenemos

$$2p = 4n(n+1) + 6.$$

Como $p > 3$ es primo, el producto $n(n+1)$ no puede ser múltiplo de 3. Entonces necesariamente tenemos $n = 3k+1$ para algún entero k. Sustituyendo obtenemos

$$p = 18k(k+1) + 7$$

y por tanto

$$p - 7 = 18k(k+1).$$

Como el producto de dos enteros consecutivos siempre es número par, podemos concluir que $18 \times 2 = 36$ divide a $p - 7$.

9.3. Nivel III.

1. Sean $a = \sqrt[3]{77 - 20\sqrt{13}}$, $b = \sqrt[3]{77 + 20\sqrt{13}}$ y $x = a + b$. Entonces tenemos las siguientes relaciones

$$a^3 + b^3 = 77 + 20\sqrt{13} + 77 - 20\sqrt{13} = 154$$

$$ab = \sqrt[3]{77 + 20\sqrt{13}} \cdot \sqrt[3]{77 - 20\sqrt{13}} = \sqrt[3]{77^2 - 20^2 \cdot 13} = \sqrt[3]{729} = 9.$$

por tanto

$$x^3 = (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a^3 + b^3) + 3ab(a+b) = 154 + 27x.$$

y en consecuencia x debe satisfacer la ecuación $x^3 - 27x - 154$. Finalmente, notemos que

$$x^3 - 27x - 154 = (x-7)(x^2 + 7x + 22).$$

Luego $x = 7$ es la única solución real de la ecuación.

2. Procedamos analizando los distintos casos posibles. Si $y \geq 0$ entonces

$$|y| - y + x = y - y + x = x$$

por lo que la segunda ecuación nos da $x = 7$. Sustituyendo este valor en la primera ecuación obtenemos $y = -12/5$, lo cual es una contradiccón. Por tanto tenemos $y < 0$. Ahora bien, si $x \leq 0$ entonces

$$|x| + x + 5y = -x + x + 5y = 5y$$

y en consecuencia la primera ecuación implica que $y = 2/5$, llegando nuevamente a una contradicción. Por tanto $x > 0$ y así tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -2y + x &= 7, \\ 2x + 5y &= 2, \end{aligned}$$

cuya solución es $x = 13/3$, $y = -4/3$. Por tanto $x + y + 2016 = 2019$.

3. Por el algoritmo de la división tenemos que $n = 100q + r$. Luego $n = 99q + q + r$. Como 11 divide a 99, entonces tenemos que 11 divide a $q + r$ si y sólo si 11 divide a n. Ahora bien, hay

$$\left\lfloor \frac{99,999}{11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{9999}{11} \right\rfloor = 9090 - 909 = 8181$$

múltiplos de 11 de 5 cifras. Por tanto $q + r$ puede tomar 8181 valores distintos.

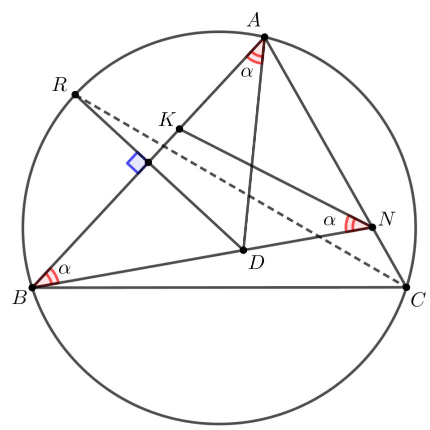
4. Centremos nuestra atención en el intento 15472. Notemos que el 2 no puede estar en la clave, ya que de estarlo debería estar en la quinta posición y en consecuencia estaría en la posición equivocada en 23497, lo cual contradice las condiciones del problema. Por exactamente el mismo motivo el 7 tampoco puede estar. Ahora bien, el 5 tampoco puede estar, ya que tendría que estar en la segunda posición y por tanto estaría en la posición adecuada en 75604, contradiciendo nuevamente las condiciones del problema. Notemos que el 4 tampoco puede estar, ya que tendría que aparecer en la tercera posición y si observamos los intentos 15472 y 75604 llegamos a la conclusión que los números 1, 6 y 0 tampoco pueden estar (pues de lo contrario se llega a una contradicción). Sin embargo, ya solo quedarían disponibles los números 3, 8 y 9, pero aún faltan cuatro números para completar la clave. Hemos finalizado el análisis del intento 15472 observando que el 1 debe estar en la primera posición y que los números 2, 7, 5 y 4 no pueden aparecer. Si nos fijamos ahora en el intento 23497 podemos ver que el 3 debe estar en la segunda posición y el 9 en la cuarta posición. Finalmente, notemos que el 6 no puede estar tampoco, ya que no podría aparecer en la tercera ni en la quinta posición debido a los intentos 75604 y 40876, respectivamente. Así podemos concluir que el 0 debe estar en la tercera posión y el 8 en la quinta posición. Entonces, sí es posible deducir que la clave de Uge es 13098.

5. Si denotamos por A, B, C a los centros de las pelotas de lado 1 podemos notar que $\triangle ABC$ es equilátero de radio 2. Si denotamos por G al gravicentro de $\triangle ABC$ entonces AG mide 2/3 de la longitud de una mediana de $\triangle ABC$, es decir, $AG = 2\sqrt{3}/3$. Sea O el centro de la pelota de radio 2, entonces O está verticalmente sobre G. Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos $OG = \sqrt{OA^2 - AG^2} = \sqrt{69}/3$. Por lo tanto O se encuentra a una altura $1 + \sqrt{69}/3$ sobre la mesa.

6. Sea$r$ el residuo de dividir a entre b. Entonces tenemos que $a = bq + r$ y $0 \leq r < b$. Ahora consideremos
$$\frac{2^a+1}{2^b-1} = \frac{2^a-2^r}{2^b-1} + \frac{2^r+1}{2^b-1}$$
y notemos que
$$2^a - 2^r = 2^{bq+r} - 2^r = 2^r(2^{bq}-1) = 2^r(2^b-1)((2^b)^{q-1} + (2^b)^{q-2} + 2^b + 1).$$
Por tanto $\dfrac{2^a-2^r}{2^b-1}$ es un entero, en tanto que $\dfrac{2^r+1}{2^b-1}$ es menor que 1. Como
$$\frac{2^a-2^r}{2^b-1} < \frac{2^a+1}{2^b-1} < \frac{2^a-2^r}{2^b-1} + 1$$
podemos con concluir que $\dfrac{2^a+1}{2^b-1}$ nunca es entero.

7. Fijémonos que las 36 casillas del tablero se pueden dividir en 18 parejas con la propiedad de que dos elementos están en la misma pareja si y solo si están relacionados por una rotación de 180°. Llamemos a este conjunto $\mathcal{P}$. Por tanto, si tomamos dos casillas $\{p, q\}$ tales que $\{p, q\} \in \mathcal{P}$, entonces existe exactamente otra pareja $\{p', q'\} \in \mathcal{P}$ relacionada con ella mediante una rotación (de 180°). Por otro lado, si tomamos dos casillas $\{p, q\}$ tales que $\{p, q\} \notin \mathcal{P}$ no están en la misma pareja, entonces hay otras 3 parejas que se relacionan con ella mediante rotaciones (de 90°, 180° y 270°). De tal suerte, tenemos
$$\frac{\binom{36}{2} - 18}{4} + \frac{18}{2} = 162$$
configuraciones que difieren por alguna rotación.

8. Como R es el punto medio del arco AB, el diámetro del circuncírculo que pasa por R es perpendicular a la cuerda AB. Es decir, RD es la mediatriz de AB. Entonces $AD = BD$ y $\angle ABD = \angle BAD$. Por hipótesis $KB = KN$ y por lo tanto $\angle KBN = \angle KNB$. Entonces
$$\angle KAD = \angle BAD = \angle ABD = \angle KBN = \angle KNB = \angle KND.$$
de donde se concluye que A, K, D, N son concíclicos.


A
R
K
α
α
N
D
α
B
C