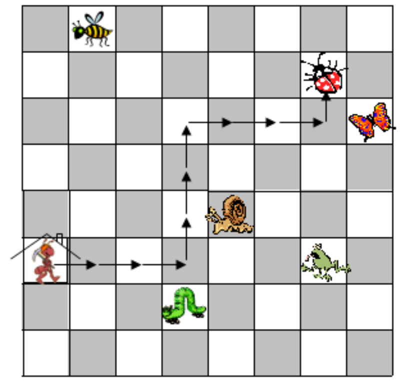
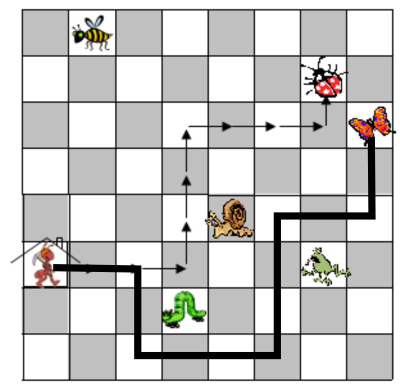
Soluciones al Segundo Examen de Invitación a la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2018 (versión C)



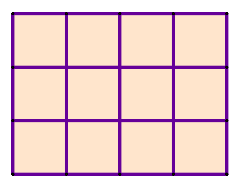
1. Cuando la hormiga  va desde la casa  siguiendo las flechas $\rightarrow 3$, $\uparrow 3$, $\rightarrow 3$, $\uparrow 1$, llega a la catarina . ¿A qué animal llega si sale de la casa y sigue las flechas: $\rightarrow 2$, $\downarrow 2$, $\rightarrow 3$, $\uparrow 3$, $\rightarrow 2$, $\uparrow 2$?

(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 



Solución 1. (a) En la figura se muestra con línea gruesa el camino que sigue.

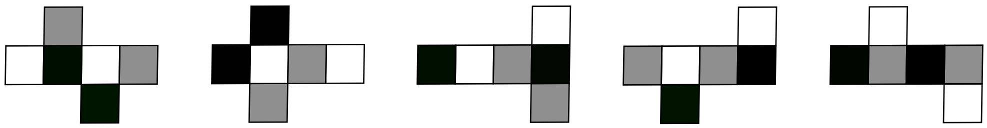
2. ¿Cuántos rectángulos que contengan un número impar de cuadritos de 1×1 se pueden encontrar dentro del tablero de 3×4?



(a) 12 (b) 16 (c) 18 (d) 24 (e) 32

Solución 2. (d) Los rectángulos con un número impar de cuadritos, son solamente de los siguientes tamaños: 1×1, 1×3, 3×1 y 3×3 de los que hay $12, 6, 4, 2$ de cada tipo. Luego la respuesta es 24.

3. Las caras de un cubo están pintadas con tres colores de manera que caras opuestas son del mismo color. ¿Cuál de las siguientes figuras corresponde al desarrollo del cubo?

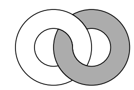


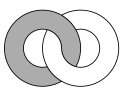
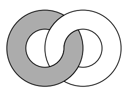
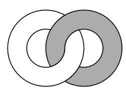
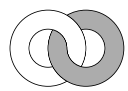
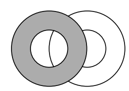
(a) (b) (c) (d) (e)

Solución 3. (e) En el cubo, cuadrados del mismo color no pueden compartir un vértice, así que esto mismo debe ocurrir al desarrollar el cubo; entonces las únicas posibilidades son (d) o (e); sin embargo, al formar el cubo a partir de (d), las caras más oscuras quedan compartiendo un vértice. En la opción (e) quedan bien.

Otra manera. Las tapas superior e inferior deben ser del mismo color, la (e) es la única que lo cumple y ya que también sus caras laterales opuestas son del mismo color.

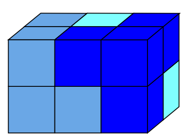
4. En la figura se muestran entrelazados un anillo gris y uno blanco. Pedro, que está enfrente de los anillos, los ve como se muestra en la figura. Pablo está detrás de los anillos. ¿Cómo los ve Pablo?

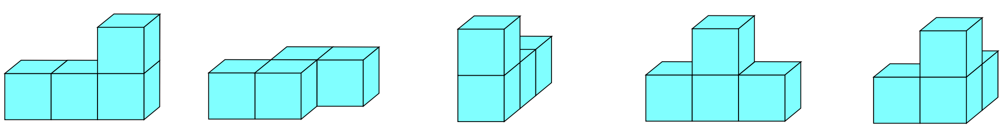


(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

Solución 4. (a) El anillo gris debe estar a la izquierda, ya que de frente está a la derecha, y debe pasar por arriba del anillo blanco en su parte izquierda.

5. Flora construyó el paralelepípedo que se muestra en la figura usando 3 piezas de distintos colores, de 4 cubitos cada una. En el dibujo se ven los cuatro cubitos de dos de las piezas; de la tercera se ven sólo 2 de los 4 cubitos. ¿Qué forma tiene la tercera pieza?





(a) (b) (c) (d) (e)

Solución 5. (d) Los cubitos de la tercera pieza deben cubrir de la parte de atrás, los tres cubitos de abajo y de la parte de arriba el cubito central.

6. Emilia quiere llenar un tanque para su tortuga y necesita 4 cubetas de agua para llenarlo. En cada viaje llena la cubeta desde una fuente y camina hacia el tanque, pero en el camino derrama 1/3 del contenido de la cubeta. ¿Cuántos viajes tiene que hacer para llenar el tanque?

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8 (e) 9

Solución 6. (b) En cada viaje, Emilia llena 2/3 de la cubeta, así que necesita hacer 6 viajes para completar 4 cubetas pues $6 \times \frac{2}{3} = 4$.

Otra manera, cada 3 viajes completa 2 cubetas, luego necesita hacer 6 viajes.

7. Pablo y Emilio tomaron agua de una jarra que estaba llena. Emilio tomó primero cierta cantidad, Pablo tomó después una cuarta parte de lo que quedaba. Si los dos tomaron la mitad del agua de la jarra, ¿qué fracción de la jarra tomó Pablo?

(a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{3}$ (e) $\frac{1}{2}$

Solución 7. (b) Denotemos por j, e, p las cantidades de agua que hay en la jarra, que toma Emilio y que bebe Pablo, respectivamente. Tenemos por los datos que, $\frac{1}{2}j = e + p$ y $4p = (j - e)$, luego al despejar e se tiene que $\frac{1}{2}j - p = e = j - 4p$, por lo que $\frac{1}{2}j = 3p$, de donde $p = \frac{1}{6}j$.

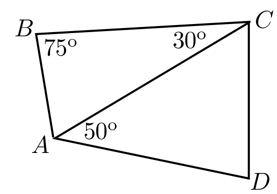
Otra manera. Pablo y Emilio toman media jarra. La otra media jarra equivale a tres veces lo que bebió Pablo, ya que el tomó la cuarta parte de lo que Emilio dejó. Luego si media jarra es tres veces lo que Pablo tomó, entonces Pablo bebió una sexta parte de la jarra.

8. En cada partido de fútbol de un torneo, al ganador se le otorgaron 3 puntos, al perdedor 0 y, si hubo empate, entonces cada equipo ganó 1 punto. En 38 partidos un equipo tenía acumulados 80 puntos. ¿Cuál es el máximo número de partidos que pudo haber perdido?

(a) 8 (b) 9 (c) 10 (d) 11 (e) 12

Solución 8. (c) Llamemos g al número de partidos ganados, e al de empatados y p al de perdidos. Tenemos que $80 = 3g + e$ y $38 = g + e + p$. Multipliquemos la segunda ecuación por 3, $114 = 3g + 3e + 3p$; a ésta restémosle la primera ecuación, $34 = 2e + 3p$. Como ambos e y p son no negativos, tenemos que $p \leq 11$ pero si $p = 11$, entonces e no es entero; para $p = 10$ tenemos $e = 2$ y, sustituyendo en la primera ecuación, $g = 26$. Ésta es la solución de ambas ecuaciones que tiene la máxima p.

9. En la figura se muestra un cuadrilátero $ABCD$. Si $BC = AD$, ¿cuánto mide el ángulo ADC?



(a) 30º (b) 50º (c) 55º (d) 65º (e) 70º

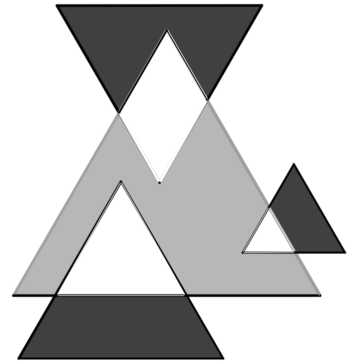
Solución 9. (d) Tenemos que $\angle BAC = 180^\circ - 75^\circ - 30^\circ = 75^\circ$, así que $AC = BC = AD$; es decir, el triángulo ACD es isósceles y entonces $\angle ACD = \angle ADC$. Por lo anterior, $\angle ADC = (180^\circ - 50^\circ)/2 = 65^\circ$.

10. ¿Cuántos números de tres cifras abc hay que cumplan, $8 > a > b > c > 0$?

(a) 8 (b) 35 (c) 42 (d) 70 (e) 210

Solución 10. (b) Números de tres cifras distintas y con cifras menores a 8, hay $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$. Pero de estos números hay 6 que se forman con las mismas cifras y solamente hay uno que cumpla $a > b > c$. Luego el resultado es $\frac{210}{6} = 35$.

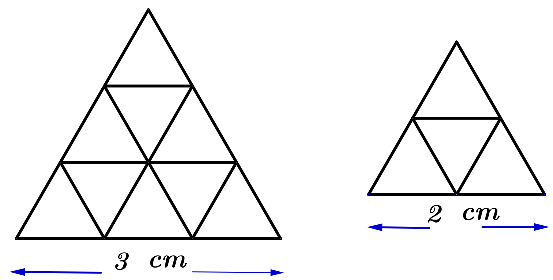
11. La figura se formó con un triángulo equilátero gris de lado 3 cm, dos triángulos equiláteros negros de lado 2 cm y otro triángulo equilátero negro de lado 1 cm, la parte común de dos triángulos se colorea de blanco. ¿Cuál es el valor de la diferencia del valor del área gris menos el valor del área negra?



(a) -2 (b) -1 (c) 0 (d) 1 (e) 2

Solución 11. (c) El área gris menos el área negra es igual al área del triángulo gris menos las áreas de los triángulos negros, ya que las partes comúnes se suman y restan.

Ahora notemos que el triángulo gris de lado 3, se puede dividir en 9 triángulos de lado 1 y el triángulo de lado 2, se puede dividir en 4 triángulos de lado 1 y como $9 = 4 + 4 + 1$, se tiene que la diferencia del área del triángulo gris menos las áreas de los triángulos negros es 0.



Otra manera de terminar. El área de un triángulo equilátero es igual $\frac{\sqrt{4}}{3}\ l^2$, donde l es la longitud del lado, por lo que la diferencia de las áreas es, $\frac{\sqrt{4}}{3}\ 3^2 - 2\ \frac{\sqrt{4}}{3}\ 2^2 - \frac{\sqrt{4}}{3}\ 1^2 = 0$.

12. Un número entero es *bi cuadrado* si se escribe de manera única como la suma de dos cuadrados. Por ejemplo $25 = 4^2 + 3^2$ es *bi cuadrado*, pero $65 = 8^2 + 1^2 = 7^2 + 4^2$ no lo es. ¿Cuál de los siguientes números es *bi cuadrado* ?

(a) 85 (b) 125 (c) 130 (d) 170 (e) 180

Solución 12. (e) $180 = 12^2 + 6^2$. Los únicos cuadrados menores a 180 son $1^2, 2^2, ..., 12^2, 13^2$. Para $a = 1, 2, ..., 13$, se tiene que $180 - a^2$ es cuadrado solamente cuando $a = 6$ o $a = 12$.

Los otros números no son *bi cuadrados,* ya que $85 = 6^2 + 7^2 = 2^2 + 9^2$, $125 = 2^2 + 11^2 = 5^2 + 10^2$, $130 = 3^2 + 11^2 = 7^2 + 9^2$ y $170 = 1^2 + 13^2 = 7^2 + 11^2$.