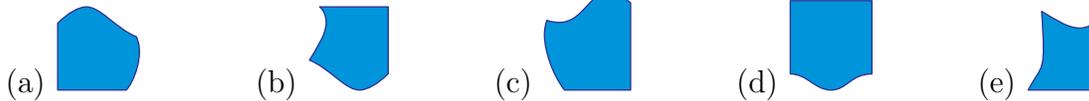


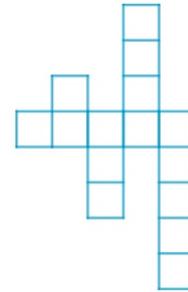
# Examen de Invitación a la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2019 (versión A)

1. ¿Cuál es la pieza que completa el cuadrado?



2. Cada cuadrado de la siguiente figura tiene área  $1\text{cm}^2$ .  
¿Cuál es el perímetro de la figura?

(a)  $15\text{ cm}$  (b)  $30\text{ cm}$  (c)  $32\text{ cm}$  (d)  $42\text{ cm}$  (e)  $60\text{ cm}$



3. La figura muestra una tabla de sumas (de números que están arriba de la tabla con números a la izquierda). A la tabla se le cayó tinta encima. ¿Qué número debe ir en lugar de la estrella?

(a) 10 (b) 11 (c) 12 (d) 13 (e) 15

+	11	7	2
6	17	13	8
		★	10

4. ¿Cuántos valores diferentes puede tener el dígito de las unidades del número que resulta de multiplicar dos números enteros consecutivos?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

5. En una escuela de verano, 7 niños comen helado cada día, 9 niños comen helado un día sí y uno no. Los demás niños no comen helado. Ayer, 13 niños comieron helado. ¿Cuántos niños comerán helado hoy?

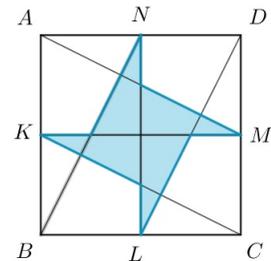
- (a) 7            (b) 8            (c) 9            (d) 10            (e) no se puede determinar

6. ¿Cuál es la suma de los dígitos de  $\underbrace{111 \cdots 11}_{2019} \times 1001$ ?

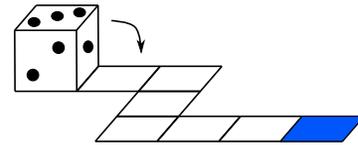
- (a) 2019            (b) 2020            (c) 2021            (d) 4038            (e) 6057

7. El cuadrado  $ABCD$  es de lado 4 cm y los puntos  $K$ ,  $L$ ,  $M$  y  $N$  son los puntos medios de los lados. ¿Cuál es el valor del área de la estrella sombreada?

- (a) 2            (b) 3            (c) 4            (d) 5            (e) 6



8. La suma de los puntos en caras opuestas de un dado siempre es 7. El dado que se muestra en la figura gira sobre el camino de cuadros hasta llegar al cuadro sombreado. Al principio su cara superior muestra 3 puntos. ¿Cuántos puntos muestra la cara superior al final?



- (a) 2            (b) 3            (c) 4            (d) 5            (e) 6

9. A la fiesta de Pablo, cada persona invitada que llegaba saludaba a Pablo y a las personas que ya estaban en la fiesta, solamente hubo una persona que cuando llegó no saludó a los que ya estaban (tampoco a Pablo), pero si lo saludaron los invitados que llegaron después de él. En la fiesta se contaron 48 saludos. ¿Cuántos invitados asistieron a la fiesta de Pablo y en qué lugar llegó la persona que no saludó al entrar?

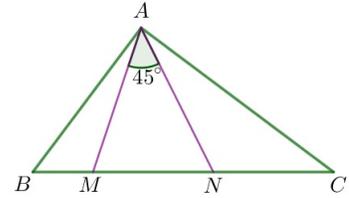
- (a) 11, 8°            (b) 11, 7°            (c) 10, 9°            (d) 10, 8°            (e) 10, 7°

10. ¿Cuántas parejas de números enteros  $(m, n)$  satisfacen la ecuación  $mn = m + n$ ?

- (a) 0            (b) 1            (c) 2            (d) 3            (e) 4

11. En la siguiente figura, se cumple que  $\angle MAN = 45^\circ$ ,  $BA = BN$  y  $CA = CM$ . ¿Cuál es la medida del ángulo  $\angle BAC$ ?

- (a)  $55^\circ$       (b)  $60^\circ$       (c)  $75^\circ$       (d)  $90^\circ$       (e)  $108^\circ$



12. ¿Cuál es la máxima suma de todos los números que pueden colocarse en los cuadritos de una cuadrícula de  $5 \times 5$  si sólo pueden escribirse números 0 y números 1 y además debe cumplirse la siguiente condición: *En cada cuadrado de  $2 \times 2$  de la cuadrícula debe haber exactamente 3 números iguales?*

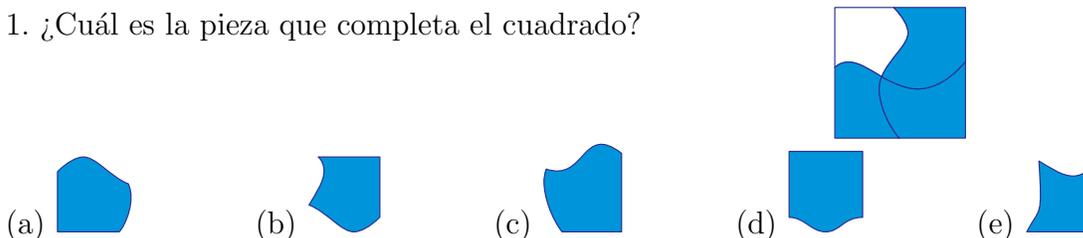
(En la figura de la derecha se da un ejemplo en el que la condición se cumple y la suma es 12.)

- (a) 22      (b) 21      (c) 20      (d) 19      (e) 18

0	1	0	0	1
1	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	0	1	1
1	0	1	1	0

# Soluciones del Examen de Invitación a la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2019 (versión A)

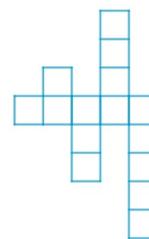
1. ¿Cuál es la pieza que completa el cuadrado?



**Solución.** (b).

2. Cada cuadrado de la siguiente figura tiene área  $1 \text{ cm}^2$ .  
¿Cuál es el perímetro de la figura?

(a)  $15 \text{ cm}$    (b)  $30 \text{ cm}$    (c)  $32 \text{ cm}$    (d)  $42 \text{ cm}$    (e)  $60 \text{ cm}$



**Solución.** (c) La longitud del lado de cada cuadrado es  $1 \text{ cm}$ . Lados izquierdos de cuadrados hay  $1 + 1 + 2 + 3 + 4 = 11$ , lados superiores de cuadrados hay 5, lados derechos hay  $1 + 2 + 3 + 5 = 11$  y lados inferiores hay 5. Luego en total son  $11 + 5 + 11 + 5 = 32 \text{ cm}$ .

3. La figura muestra una tabla de sumas (de números que están arriba de la tabla con números a la izquierda). A la tabla se le cayó tinta encima. ¿Qué número debe ir en lugar de la estrella?

(a) 10   (b) 11   (c) 12   (d) 13   (e) 15

+	11	7	2
6	17	13	8
	*	*	10

**Solución.** (e) Para obtener 10 (abajo a la derecha), lo que hay que sumar a 2 es 8; de esta manera vemos que lo que va en la estrella es 15, pues es el resultado de sumar 8 a 7.

4. ¿Cuántos valores diferentes puede tener el dígito de las unidades del número que resulta de multiplicar dos números enteros consecutivos?

- (a) 1                      (b) 2                      (c) 3                      (d) 4                      (e) 5

**Solución. (c)** El dígito de las unidades del producto de dos enteros consecutivos solamente depende del dígito de las unidades de los números enteros que se multiplican; pero,  $0 \times 1 = 0$ ,  $1 \times 2 = 2$ ,  $2 \times 3 = 6$ ,  $3 \times 4 = 12$ ,  $4 \times 5 = 20$ ,  $5 \times 6 = 30$ ,  $6 \times 7 = 42$ ,  $7 \times 8 = 56$  y  $8 \times 9 = 72$ , luego sólo son posibles 0, 2 y 6.

5. En una escuela de verano, 7 niños comen helado cada día, 9 niños comen helado un día sí y uno no. Los demás niños no comen helado. Ayer, 13 niños comieron helado. ¿Cuántos niños comerán helado hoy?

- (a) 7                      (b) 8                      (c) 9                      (d) 10                      (e) no se puede determinar

**Solución. (d)** Como ayer 13 niños comieron helado y 7 niños siempre lo hacen, entonces hubo 6 que comieron helado de los que sólo comen un día sí y otro no. A los otros 3 les toca hoy, así que en total hoy comerán helado 10 niños.

6. ¿Cuál es la suma de los dígitos de  $\underbrace{111 \cdots 11}_{2019} \times 1001$ ?

- (a) 2019                      (b) 2020                      (c) 2021                      (d) 4038                      (e) 6057

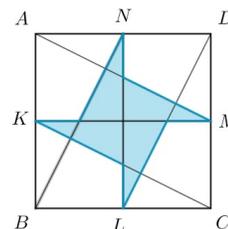
**Solución. (d)** Tenemos que

$$\underbrace{111 \cdots 11}_{2019} \times 1001 = \underbrace{111 \cdots 11}_{2019} \times 1000 + \underbrace{111 \cdots 11}_{2019} = \underbrace{111 \cdots 11}_{2019} 000 + \underbrace{111 \cdots 11}_{2019} = 111 \underbrace{222 \cdots 22}_{2016} 111.$$

Entonces la suma de los dígitos es  $2016 \times 2 + 6 = 4038$ .

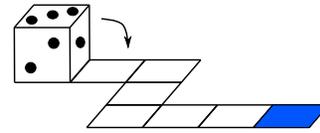
7. El cuadrado  $ABCD$  es de lado 4  $cm$  y los puntos  $K$ ,  $L$ ,  $M$  y  $N$  son los puntos medios de los lados. ¿Cuál es el valor del área de la estrella sombreada?

- (a) 2                      (b) 3                      (c) 4                      (d) 5                      (e) 6



**Solución. (c)** La estrella sombreada se forma con 4 triángulos rectángulos congruentes con catetos de longitudes 2 y 1, el área de cada uno es  $\frac{2 \times 1}{2} = 1$ , luego la estrella sombreada tiene área  $4 \text{ cm}^2$ .

8. La suma de los puntos en caras opuestas de un dado siempre es 7. El dado que se muestra en la figura gira sobre el camino de cuadros hasta llegar al cuadro sombreado. Al principio su cara superior muestra 3 puntos. ¿Cuántos puntos muestra la cara superior al final?



- (a) 2      (b) 3      (c) 4      (d) 5      (e) 6

**Solución. (e)** Los números sucesivos en la cara de arriba son: 3, 6, 4, 5, 3, 1, 4 y, finalmente, 6.

9. A la fiesta de Pablo, cada persona invitada que llegaba saludaba a Pablo y a las personas que ya estaban en la fiesta, solamente hubo una persona que cuando llegó no saludó a los que ya estaban (tampoco a Pablo), pero si lo saludaron los invitados que llegaron después de él. En la fiesta se contaron 48 saludos. ¿Cuántos invitados asistieron a la fiesta de Pablo y en qué lugar llegó la persona que no saludó al entrar?

- (a) 11, 8°      (b) 11, 7°      (c) 10, 9°      (d) 10, 8°      (e) 10, 7°

**Solución. (e)** Si todos saludan, la primera persona al llegar saluda a Pablo, la segunda saluda a dos, la tercera a tres, etcétera. Los números de saludos son: 1, 1+2, 1+2+3,... ; es decir, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66,... Como hubo 48 saludos, llegaron 10 o más invitados. Como  $55 - 48 = 7$ , entonces la séptima persona no saludó y asistieron 10. Observemos que si asisten más de 10, la diferencia del número de saludos (si saluda a todos) menos 48 es mayor o igual al número de invitados.

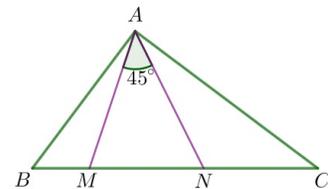
10. ¿Cuántas parejas de números enteros  $(m, n)$  satisfacen la ecuación  $mn = m + n$ ?

- (a) 0      (b) 1      (c) 2      (d) 3      (e) 4

**Solución. (c)** La ecuación es equivalente a  $mn - m - n + 1 = (m - 1)(n - 1) = 1$  que tiene por soluciones a  $m = n = 2$  y  $m = n = 0$ .

11. En la siguiente figura, se cumple que  $\angle MAN = 45^\circ$ ,  $BA = BN$  y  $CA = CM$ . ¿Cuál es la medida del ángulo  $\angle BAC$ ?

- (a) 55°      (b) 60°      (c) 75°      (d) 90°      (e) 108°



**Solución. (d)** Si  $x = \angle BAM$ ,  $y = \angle NAC$ , tenemos por ser isósceles el triángulo  $ABN$ , que  $\angle B = 180^\circ - 2(45^\circ + x) = 90^\circ - 2x$  y también por ser isósceles el triángulo  $AMC$ , que  $\angle C = 180^\circ - 2(45^\circ + y) = 90^\circ - 2y$ . Luego el ángulo  $\angle BAC$  es por un lado  $\angle BAC = 45^\circ + x + y$  y por otro lado  $\angle BAC = 180^\circ - \angle A - \angle B = 2x + 2y$ , igualando estas expresiones se tiene que  $x + y = 45^\circ$ , por lo que  $\angle BAC = 90^\circ$ .

12. ¿Cuál es la máxima suma de todos los números que pueden colocarse en los cuadrillos de una cuadrícula de  $5 \times 5$  si sólo pueden escribirse números 0 y números 1 y además debe cumplirse la siguiente condición: *En cada cuadrado de  $2 \times 2$  de la cuadrícula debe haber exactamente 3 números iguales?*

(En la figura de la derecha se da un ejemplo en el que la condición se cumple y la suma es 12.)

0	1	0	0	1
1	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	0	1	1
1	0	1	1	0

- (a) 22      (b) 21      (c) 20      (d) 19      (e) 18

**Solución. (b)** Forzosamente en cada una de las subcuadrículas de  $2 \times 2$  de las esquinas debe haber al menos un 0, sí que la máxima suma es menor o igual que 21. En la configuración mostrada a la derecha vemos que sí es posible lograr 21.

1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1