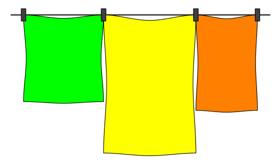
Examen de Invitación a la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2019 (versión B)

1. Usando la menor cantidad posible de pinzas, el Sr. Rodríguez quiere tender las toallas que lavó. Para 3 toallas necesita 4 pinzas, como se muestra en la figura. ¿Cuántas pinzas necesita para tender 9 toallas?

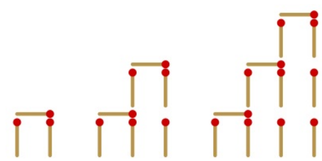


(a) 9 (b) 10 (c) 12 (d) 16 (e) 18

2. Raquel sumó algunos números y obtuvo 1234, pero se equivocó y sumó 201 en lugar de 102. ¿Cuál es el resultado correcto?

(a) 893 (b) 995 (c) 1103 (d) 1105 (e) 1135

3. Las siguientes 3 figuras se formaron con 3, 7 y 12 cerillos, respectivamente. ¿Cuántos cerillos se necesitan agregar a la novena figura para formar la décima?

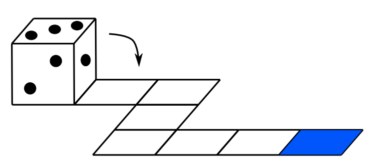


(a) 9 (b) 10 (c) 11 (d) 12 (e) 13

4. En una escuela de verano, 7 niños comen helado cada día, 9 niños comen helado un día sí y uno no. Los demás niños no comen helado. Ayer, 13 niños comieron helado. ¿Cuántos niños comerán helado hoy?

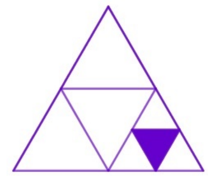
(a) 7 (b) 8 (c) 9 (d) 10 (e) no se puede determinar

5. La suma de los puntos en caras opuestas de un dado siempre es 7. El dado que se muestra en la figura gira sobre el camino de cuadros hasta llegar al cuadro sombreado. Al principio su cara superior muestra 3 puntos. ¿Cuántos puntos muestra la cara superior al final?



(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

6. En la siguiente figura todos los triángulos son equiláteros. Si el triángulo mayor tiene área $16m^2$. ¿Cuál es el área del triángulo sombreado?

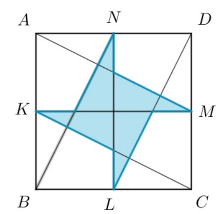


(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 6

7. ¿Cuántos ceros deberá tener el número $100\ldots01$ para que el número $(111111) \times (100\ldots01)$, sea un número con puros dígitos iguales a 1?
Por ejemplo 101 no sirve ya que $(111111) \times (101) = 1122211$.

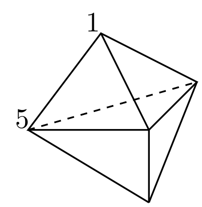
(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) más de 6

8. El cuadrado $ABCD$ es de lado 4 y los puntos K, L, M y N son los puntos medios de los lados. ¿Cuál es el valor del área de la estrella sombreada?



(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

9. La figura muestra un sólido formado con 6 caras triangulares. En cada vértice hay un número. Para cada cara consideramos la suma de los tres vértices de esa cara. Si todas las sumas son iguales, y dos de los números son 1 y 5 como se muestra, ¿cuál es la suma de los 5 números que hay en los vértices?



(a) 9 (b) 12 (c) 17 (d) 18 (e) 24

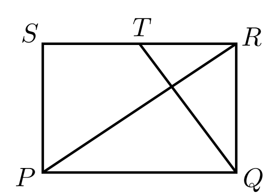
10. ¿Cuántos números hay de la forma $m^2 + n^2$, con m, n enteros positivos, que sean múltiplos de 3 y menores que 100?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 6 (e) 8

11. ¿Cuántos enteros positivos de tres dígitos hay que cumplan que el dígito de las unidades divide al número formado con los dígitos de las centenas y de las decenas?
Nota. Uno de tales números es 213 ya que 3 divide a 21.

(a) 40 (b) 98 (c) 180 (d) 254 (e) 320

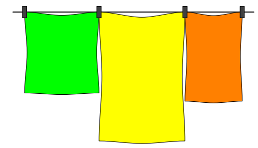
12. Considera $PQRS$ un rectángulo, donde T el punto medio de RS satisface que QT es perpendicular a la diagonal PR. ¿Cuál es el valor de $\frac{QR}{PQ}$?



(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (e) $\frac{4}{5}$

Soluciones del Examen de Invitación a la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2019 (versión B)

1. Usando la menor cantidad posible de pinzas, el Sr. Rodríguez quiere tender las toallas que lavó. Para 3 toallas necesita 4 pinzas, como se muestra en la figura. ¿Cuántas pinzas necesita para tender 9 toallas?



(a) 9 (b) 10 (c) 12 (d) 16 (e) 18

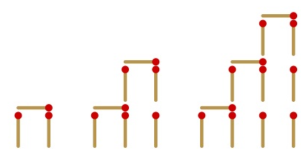
Solución. (b) Podemos pensar que primero ponemos una pinza a la izquierda, y ya luego, por cada toalla se agrega una pinza más.

2. Raquel sumó algunos números y obtuvo 1234, pero se equivocó y sumó 201 en lugar de 102. ¿Cuál es el resultado correcto?

(a) 893 (b) 995 (c) 1103 (d) 1105 (e) 1135

Solución. (e) Como $201 - 102 = 99$, el nuevo resultado es $1234 - 99 = 1135$.

3. Las siguientes 3 figuras se formaron con 3, 7 y 12 cerillos, respectivamente. ¿Cuántos cerillos se necesitan agregar a la novena figura para formar la décima?



(a) 9 (b) 10 (c) 11 (d) 12 (e) 13

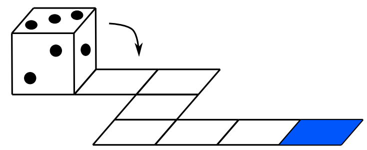
Solución. (d) Para pasar de una figura a la siguiente se necesitan agregar primero dos cerillos uno vertical en la orilla de la figura que se agranda y otro horizontal, después se agregan tantos como la altura de la nueva figura. En este caso, son necesarios en total 12 cerillos más.

4. En una escuela de verano, 7 niños comen helado cada día, 9 niños comen helado un día sí y uno no. Los demás niños no comen helado. Ayer, 13 niños comieron helado. ¿Cuántos niños comerán helado hoy?

(a) 7 (b) 8 (c) 9 (d) 10 (e) no se puede determinar

Solución. (d) Como ayer 13 niños comieron helado y 7 niños siempre lo hacen, entonces hubo 6 que comieron helado de los que sólo comen un día sí y otro no. A los otros 3 les toca hoy, así que en total hoy comerán helado 10 niños.

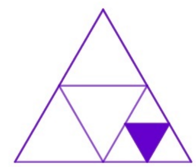
5. La suma de los puntos en caras opuestas de un dado siempre es 7. El dado que se muestra en la figura gira sobre el camino de cuadros hasta llegar al cuadro sombreado. Al principio su cara superior muestra 3 puntos. ¿Cuántos puntos muestra la cara superior al final?



(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

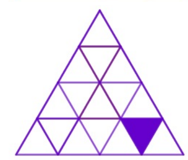
Solución. (e) Los números en la cara de arriba son: 3, 6, 4, 5, 3, 1, 4 y, finalmente, 6.

6. En la siguiente figura todos los triángulos son equiláteros. Si el triángulo mayor tiene área $16m^2$. ¿Cuál es el área del triángulo sombreado?



(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 6

Solución. (a) Basta observar que el triángulo grande se puede dividir en 16 triángulos congruentes al triángulo sombreado, como en la siguiente figura:

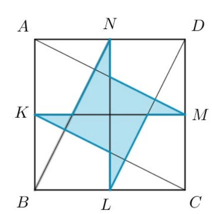


7. ¿Cuántos ceros deberá tener el número $100\ldots01$ para que el número $(111111)\times(100\ldots01)$, sea un número con puros dígitos iguales a 1?
Por ejemplo 101 no sirve ya que $(111111)\times(101) = 1122211$.

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) más de 6

Solución. (c) Con 3 o 4 ceros no es posible, se obtienen los números 1111221111 y 11111211111. Con 5 ceros si es posible y se obtiene el numero 111111111111 y con 6 o más ceros no es posible se obtienen números de la forma $1111110\ldots0111111$.

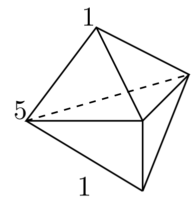
8. El cuadrado $ABCD$ es de lado 4 y los puntos K, L, M y N son los puntos medios de los lados. ¿Cuál es el valor del área de la estrella sombreada?



(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

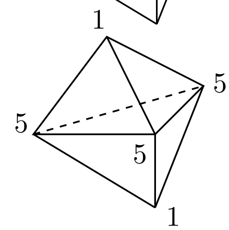
Solución. (c) La estrella sombreada se forma con 4 triángulos rectángulos congruentes, cada uno con catetos de longitudes 2 y 1, luego el área de cada triángulo es $\frac{2\times1}{2} = 1$, y la estrella sombreada tiene área 4 cm^2.

9. La figura muestra un sólido formado con 6 caras triangulares. En cada vértice hay un número. Para cada cara consideramos la suma de los tres vértices de esa cara. Si todas las sumas son iguales, y dos de los números son 1 y 5 como se muestra, ¿cuál es la suma de los 5 números que hay en los vértices?



(a) 9 (b) 12 (c) 17 (d) 18 (e) 24

Solución. (c) Dos caras comparten la arista que tiene los vértices numerados con 1 y 5, así que los dos otros vértices de esas caras deben tener el mismo número, digamos a. Ahora nos fijamos en el vértice inferior de la figura; éste forma parte de tres triángulos, y los otros extremos de éstos son a y 5, o a y a, de donde tenemos que $a = 5$, y entonces el vértice inferior tiene el mismo número que el superior (es decir, 1). La suma de todos es $1 + 5 + 5 + 5 + 1 = 17$ y la figura es la de la derecha.



10. ¿Cuántos números hay de la forma $m^2 + n^2$, con m, n enteros positivos, que sean múltiplos de 3 y menores que 100?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 6 (e) 8

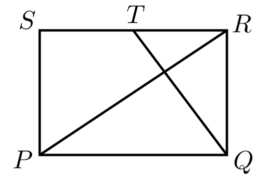
Solución. (c) Los números cuadrados menores a 100 son $1^2, 2^2, \ldots, 9^2$, estos al dividirse entre 3 dejan residuo 0 o 1. Como la suma de dos cuadrados es múltiplo de 3 solamente si ambos números son múltiplos de 3, tenemos que los únicos números que cumplen las condiciones son $3^2 + 3^2 = 18$, $3^2 + 6^2 = 45$, $3^2 + 9^2 = 90$ y $6^2 + 6^2 = 72$.

11. ¿Cuántos enteros positivos de tres dígitos hay que cumplan que el dígito de las unidades divide al número formado con los dígitos de las centenas y de las decenas?
Nota. Uno de tales números es 213 ya que 3 divide a 21.

(a) 40 (b) 98 (c) 180 (d) 254 (e) 320

Solución. (d) Para cada dígito a (diferente de cero) hay que encontrar cuántos números de dos dígitos son divisibles entre a. Para $a = 1$, como hay 90 números de dos dígitos, ya que el dígito de las decenas no puede ser cero y como todo entero es divisible entre 1, tenemos en este caso 90 números. Para $a = 2$, hay 45 que son los múltiplos de 2. Si $a = 3$, hay 30 múltiplos de 3. Si $a = 4$, hay 22. Si $a = 5$, hay 18. Si $a = 6$, hay 15. Si $a = 7$, hay 13. Si $a = 8$, hay 11. Si $a = 9$, hay 10. En total hay 254 números.

12. Considera $PQRS$ un rectángulo, donde T el punto medio de RS satisface que QT es perpendicular a la diagonal PR. ¿Cuál es el valor de $\frac{QR}{PQ}$?



(a) $\dfrac{1}{2}$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $\dfrac{2}{3}$ (d) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (e) $\dfrac{4}{5}$

Solución. (d) Llamemos O a la intersección de TQ y RP. Como los triángulos OQR y RPQ son rectángulos, tenemos que $\angle TQR + \angle PRQ = \angle PRQ + \angle RPQ = 90^{\text{o}}$, de donde $\angle TQR = \angle RPQ$. Por lo anterior, como TQR y PRQ son triángulos rectángulos, resultan ser triángulos semejantes, así que $\frac{QR}{PQ} = \frac{TR}{QR} = \frac{PQ}{2QR}$, lo que implica que $\left(\frac{QR}{PQ}\right)^2 = \frac{1}{2}$.