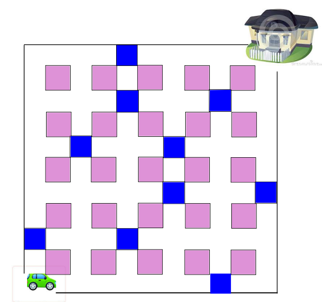
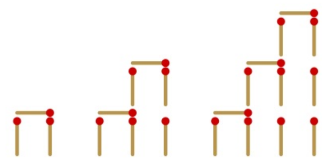
Examen de Invitación a la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2019 (versión C)

1. El coche irá por el camino blanco hasta la casa sin pasar dos veces por el mismo punto. ¿Cuántas veces dará vuelta a la izquierda?



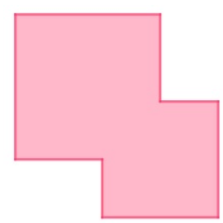
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

2. Las siguientes 3 figuras se formaron con 3, 7 y 12 cerillos, respectivamente. ¿Cuántos cerillos se necesitan agregar a la novena figura para formar la décima?



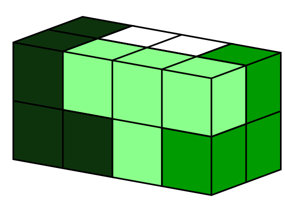
(a) 9 (b) 10 (c) 11 (d) 12 (e) 13

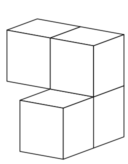
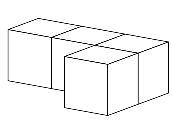
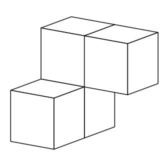
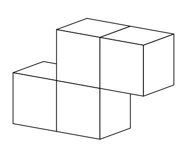
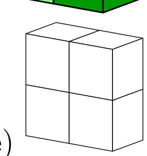
3. La siguiente figura se formó con dos cuadrados, uno de lado $5cm$ y otro de lado $4cm$, además un vértice del cuadrado grande coincide con el centro de cuadrado pequeño. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



(a) 41 (b) 40 (c) 37 (d) 36 (e) 29

4. Un bloque de 16 cubos está formado por 4 piezas de 4 cubos cada una: Una negra, una gris oscuro, una gris claro y una blanca, como se ve en la figura. ¿Qué forma tiene la pieza blanca?



(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

5. ¿Cuántos valores diferentes puede tener el dígito de las unidades del número que resulta de multiplicar dos números enteros consecutivos?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

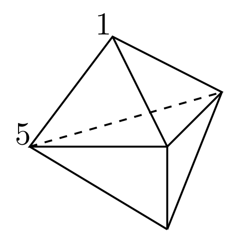
6. ¿Cuál es la suma de los dígitos de $\underbrace{111\cdots11}_{2019}\times 1001$?

(a) 2019 (b) 2020 (c) 2021 (d) 4038 (e) 6057

7. Emilio y su Mamá tienen edades que usan los mismos dos dígitos. Si la diferencia de edades es 27 y Emilio es menor de edad, ¿cuál es la edad de Emilio?

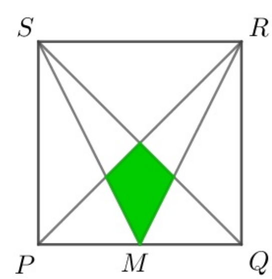
(a) 25 (b) 21 (c) 18 (d) 14 (e) 12

8. La figura muestra un sólido formado con 6 caras triangulares. En cada vértice hay un número. Para cada cara consideramos la suma de los tres vértices de esa cara. Si todas las sumas son iguales, y dos de los números son 1 y 5 como se muestra, ¿cuál es la suma de los 5 números que hay en los vértices?



(a) 9 (b) 12 (c) 17 (d) 18 (e) 24

9. En la figura, $PQRS$ es un cuadrado y M es el punto medio de PQ. El área del cuadrado es k veces el área sombreada. ¿Cuál es el valor de k ?



(a) 6 (b) 8 (c) 10 (d) 12 (e) 16

10. Considera todos los números de tres dígitos que usan solamente las cifras 2, 3 y 4, sin repetir alguna de ellas. ¿Cuál es el promedio de tales números?

(a) 324 (b) 333 (c) 342 (d) 444 (e) 666

11. Los números reales a y b son distintos de cero y tales que $(a+1)(b-1) = -1$. ¿Cuál es el valor de $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} - ab$?

(a) -2 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) 0 (d) $\frac{1}{2}$ (e) 2

12. ¿Cuál es la máxima suma de todos los números que pueden colocarse en los cuadritos de una cuadrícula de 5×5 si sólo pueden escribirse números 0 y números 1 y además debe cumplirse la siguiente condición: *En cada cuadrado de* 2×2 *de la cuadrícula debe haber exactamente 3 números iguales* ?

(En la figura de la derecha se da un ejemplo en el que la condición se cumple y la suma es 12.)

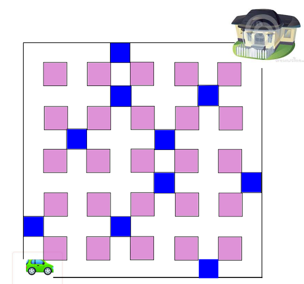
0	1	0	0	1
1	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	0	1	1
1	0	1	1	0

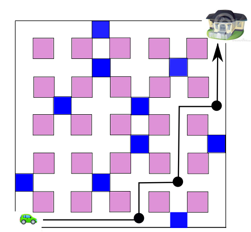
(a) 22 (b) 21 (c) 20 (d) 19 (e) 18

Soluciones al Examen de Invitación a la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2019 (versión C)

1. El coche irá por el camino blanco hasta la casa sin pasar dos veces por el mismo punto. ¿Cuántas veces dará vuelta a la izquierda?

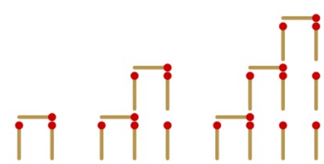
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5





Solución. (c) Recorrerá el camino marcado. Se han puesto círculos donde da vuelta a la izquierda.

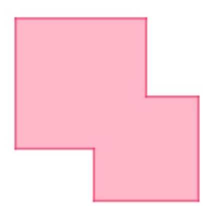
2. Las siguientes 3 figuras se formaron con 3, 7 y 12 cerillos, respectivamente. ¿Cuántos cerillos se necesitan agregar a la novena figura para formar la décima?



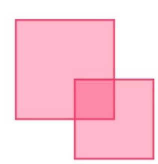
(a) 9 (b) 10 (c) 11 (d) 12 (e) 13

Solución. (d) Para pasar de una figura a la siguiente se necesitan agregar primero dos cerillos uno vertical en la orilla de la figura que se agranda y otro horizontal, después se agregan tantos como la altura de la nueva figura. En este caso, son necesarios en total 12 cerillos más.

3. La siguiente figura se formó con dos cuadrados, uno de lado $5cm$ y otro de lado $4cm$, además un vértice del cuadrado grande coincide con el centro de cuadrado pequeño. ¿Cuál es el área de la región sombreada?

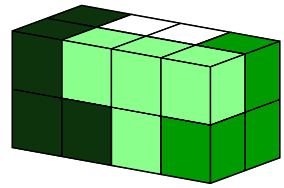


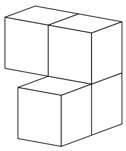
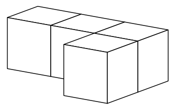
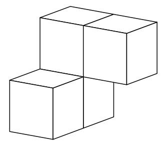
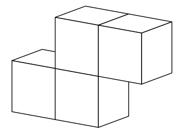
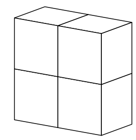
(a) 41 (b) 40 (c) 37 (d) 36 (e) 29



Solución. (c) Las áreas de los cuadrados son $25cm^2$ y $16cm^2$, la parte común es un cuadrado de lado 2, luego el área de la región sombreada es $25 + 16 - 4 = 37$.

4. Un bloque de 16 cubos está formado por 4 piezas de 4 cubos cada una: Una negra, una gris oscuro, una gris claro y una blanca, como se ve en la figura. ¿Qué forma tiene la pieza blanca?



(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

Solución. (d). De la figura blanca que falta, se ven dos cubos, los otros dos deben estar atrás y abajo junto a los dos cubos de la figura gris obscuro.

5. ¿Cuántos valores diferentes puede tener el dígito de las unidades del número que resulta de multiplicar dos números enteros consecutivos?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Solución. (c) El dígito de las unidades del producto de dos enteros consecutivos solamente depende del dígito de las unidades de los números enteros que se multiplican; pero, $0 \times 1 = 0$, $1 \times 2 = 2$, $2 \times 3 = 6$, $3 \times 4 = 12$, $4 \times 5 = 20$, $5 \times 6 = 30$, $6 \times 7 = 42$, $7 \times 8 = 56$ y $8 \times 9 = 72$, luego sólo son posibles 0, 2 y 6.

6. ¿Cuál es la suma de los dígitos de $\underbrace{111\cdots 11}_{2019} \times 1001$?

(a) 2019 (b) 2020 (c) 2021 (d) 4038 (e) 6057

Solución. (d) Tenemos que

$$\underbrace{111\cdots 11}_{2019} \times 1001 = \underbrace{111\cdots 11}_{2019} \times 1000 + \underbrace{111\cdots 11}_{2019} = \underbrace{111\cdots 11}_{2019}000 + \underbrace{111\cdots 11}_{2019} = 111\underbrace{222\cdots 22}_{2016}111.$$

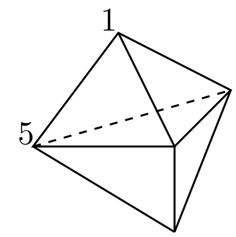
Entonces la suma de los dígitos es $2016 \times 2 + 6 = 4038$.

7. Emilio y su Mamá tienen edades que usan los mismos dos dígitos. Si la diferencia de edades es 27 y Emilio es menor de edad, ¿cuál es la edad de Emilio?

(a) 25 (b) 21 (c) 18 (d) 14 (e) 12

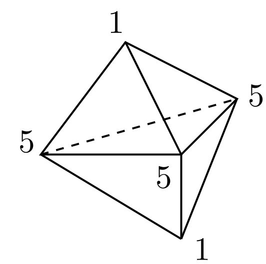
Solución. (d) Si ab y ba son las edades de la Mamá y de Emilio, entonces $27 = ab - ba = (10a + b) - (10b + a) = (a - b)9$, por lo que $a - b = 3$. Luego las edades posibles (Mamá, Emilio) son $(96, 69)$, $(85, 58)$, $(74, 47)$, $(63, 36)$, $(52, 25)$ y $(41, 14)$, como Emilio es menor de edad, él tiene 14 años. Otra forma. Como Emilio es menor de edad, su edad solamente puede estar entre 11 y 18 años, ahora sumando a cada uno de estos números 27, se puede verificar que 14 es el único que cumple las condiciones.

8. La figura muestra un sólido formado con 6 caras triangulares. En cada vértice hay un número. Para cada cara consideramos la suma de los tres vértices de esa cara. Si todas las sumas son iguales, y dos de los números son 1 y 5 como se muestra, ¿cuál es la suma de los 5 números que hay en los vértices?

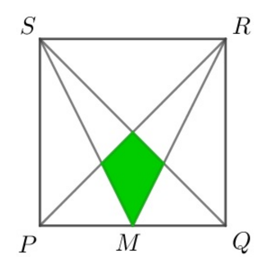


(a) 9 (b) 12 (c) 17 (d) 18 (e) 24

Solución. (c) Dos caras comparten la arista que tiene los vértices numerados con 1 y 5, así que los dos otros vértices de esas caras deben tener el mismo número, digamos a. Ahora nos fijamos en el vértice inferior de la figura; éste forma parte de tres triángulos, y los otros extremos de éstos son a y 5, o a y a, de donde tenemos que $a = 5$, y entonces el vértice inferior tiene el mismo número que el superior (es decir, 1). La suma de todos es $1 + 5 + 5 + 5 + 1 = 17$ y la figura es la de la derecha.



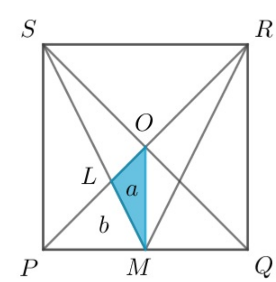
9. En la figura, $PQRS$ es un cuadrado y M es el punto medio de PQ. El área del cuadrado es k veces el área sombreada. ¿Cuál es el valor de k ?



(a) 6 (b) 8 (c) 10 (d) 12 (e) 16

Solución. (d) Sean O y L las intersecciones de la diagonal PR con SQ y SM, respectivamente. Supongamos que el lado del cuadrado es 2. Si $a = (OLM)$ y $b = (LPM)$, tenemos que,

$$\frac{OL}{LP} = \frac{a}{b} = \frac{(SOM)}{(SPM)} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2},$$



luego $2a = b$. Como $a+b = (OPM) = \frac{1}{2}$, se tiene que $a+2a = \frac{1}{2}$, por lo que $a = \frac{1}{6}$ y entonces el área sombreada es $\frac{1}{3}$. Ahora como $k\frac{1}{3} = 4$, es inmediato que $k = 12$.

10. Considera todos los números de tres dígitos que usan solamente las cifras 2, 3 y 4, sin repetir alguna de ellas. ¿Cuál es el promedio de tales números?

(a) 324 (b) 333 (c) 342 (d) 444 (e) 666

Solución. (b) Con los dígitos 2, 3 y 4, solamente se pueden formar seis números: 234, 243, 324, 342, 423, 432. Su promedio es: $\frac{234+243+324+342+423+432}{6} = 333$.

Una forma de reducir esta fracción, es usar el truco de Gauss:

$$\begin{array}{rr} & 234+243+324+342+423+432 \\ + & 432+423+342+324+243+234 \\ \hline & 666+666+666+666+666+666 \end{array}$$

Por tanto el promedio es $\dfrac{\frac{1}{2}(6 \times 666)}{6} = 333$

11. Los números reales a y b son distintos de cero y tales que $(a+1)(b-1) = -1$. ¿Cuál es el valor de $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} - ab$?

(a) -2 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) 0 (d) $\frac{1}{2}$ (e) 2

Solución. (e) La condición $(a+1)(b-1) = -1$ es equivalente a $ab = a - b$, por lo que

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab = \frac{a^2 + b^2 - (ab)^2}{ab} = \frac{a^2 + b^2 - (a-b)^2}{ab} = \frac{2ab}{ab} = 2.$$

12. ¿Cuál es la máxima suma de todos los números que pueden colocarse en los cuadritos de una cuadrícula de 5×5 si sólo pueden escribirse números 0 y números 1 y además debe cumplirse la siguiente condición: *En cada cuadrado de* 2×2 *de la cuadrícula debe haber exactamente 3 números iguales* ?
(En la figura de la derecha se da un ejemplo en el que la condición se cumple y la suma es 12.)

0	1	0	0	1
1	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	0	1	1
1	0	1	1	0

(a) 22 (b) 21 (c) 20 (d) 19 (e) 18

Solución. (b) Forzosamente en cada una de las subcuadrículas de 2×2 de las esquinas debe haber al menos un 0, sí que la máxima suma es menor o igual que 21. En la configuración mostrada a la derecha vemos que sí es posible lograr 21.

1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1