TZALOA
Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2017, No. 2

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor: Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas, UADY.

Impreso: Torre y de la Torre Impresos
Aragón no. 134
Col. Álamos, 03400
Ciudad de México
Teléfonos: (55) 55-30-14-82 y (55) 55-38-34-53

Esta publicación se imprimió con el apoyo financiero del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt).

CONACYT
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Impreso y hecho en México.
Mayo de 2017.

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2017, Número 2

El principal interés de quienes elaboramos la revista Tzaloa, es lograr una publicación verdaderamente útil. De esta forma, en cada uno de los números buscamos proveer al lector de material e información que puede no ser fácil encontrar en otros medios. En particular, el artículo de matemáticas, que se incluye al inicio de la cada número de la revista, suele ser elaborado por destacados miembros de la comunidad olímpica mexicana y sus contenidos son reflejo de una vasta experiencia. En este sentido, el artículo *Problemas sobre dígitos*, escrito por Emerson Lucas Soriano Pérez y Carlos Jacob Rubio Barrios, no es la excepción. A través de sus páginas el lector conocerá las propiedades básicas de las funciones suma de dígitos y producto de dígitos de un entero positivo y su utilidad en la solución de problemas. De su estudio se derivan muchos resultados interesantes que son tema de las olimpiadas de matemáticas y de

[1]Vocablo náhuatl cuyo significado en español es *aprender*.

gran utilidad en diversos problemas de álgebra. Estamos seguros que será un buen aporte para incrementar tus competencias.

De especial interés para todos, en este segundo número del año 2017 incluimos los exámenes con soluciones, de la XXIX Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico, la 6^a Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas y la 9^a Romanian Master of Mathematics. Todos certámenes donde México participó en el primer trimestre de este año 2017.

En la sección de *Concursos Estatales* hemos publicado los exámenes de la segunda etapa y la tercera etapa, de la XXXI Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Baja California. Agradecemos a Carlos Yee Romero (delegado de Baja California) por habernos proporcionado el material y aprovechamos invitar a todos los delegados estatales a que nos envíen sus propuestas de exámenes que han utilizado para seleccionar a sus delegaciones rumbo al concurso nacional de la OMM, para que sean publicados en esta sección.

Como en cada número, hemos puesto todo nuestro entusiasmo en la integración de las diferentes secciones que conforman la revista. Todos los problemas, soluciones, exámenes y demás contenido han sido escogidos, revisados y preparados especialmente pensando en el lector.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

31ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 31^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1998. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2017-2018 y, para el 1° de julio de 2018, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org`.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 31^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 6 al 10 de noviembre de 2017 en Monterrey, Nuevo León. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2017 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXX Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 59^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (Rumania, julio de 2018) y a la XXXIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (Portugal y España, septiembre de 2018).

De entre los concursantes nacidos en 2001 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XX Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (Cuba, junio de 2018).

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la VII Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) a celebrarse en el mes de abril de 2018.

1ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica

En el año 2017, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) organiza la Primera Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB). Podrán participar los alumnos de Primaria y Secundaria, de acuerdo a los siguientes niveles.

Nivel I. Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 12 años al 1 de julio de 2017.

Nivel II. Estudiantes de sexto año de primaria y primer año de secundaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 14 años al 1 de julio de 2017.

Nivel III. Estudiantes de segundo año de secundaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 15 años al 1 de julio de 2017.

La participación en la competencia es a través de los comités estatales de la OMMEB.

El concurso nacional de la 1^a OMMEB se realizará en Oaxtepec, Morelos, del 15 al 18 de junio de 2017. Cada Estado participante lo puede hacer con a lo más un equipo en cada categoría. Cada equipo estará integrado por un máximo de 4 personas: un líder y 3 estudiantes (una misma persona puede ser líder de más de un equipo).

Habrá dos tipos de exámenes: individual y por equipos. La prueba individual para el nivel I constará de 15 problemas a responder en 90 minutos, mientras que para los niveles II y III, constará de dos partes. La parte A consistirá de 12 problemas en la cual solo la respuesta es requerida. La parte B consistirá de 3 problemas y las soluciones tendrán que ir acompañadas de argumentos o explicaciones que sustenten la respuesta. La prueba por equipos en los tres niveles, consistirá de 8 problemas a resolver en 60 minutos.

Los ganadores de los distintos niveles se preseleccionarán para recibir entrenamiento y presentar exámenes selectivos para conformar a los equipos que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), que se realizará en Burgas, Bulgaria durante el verano de 2018.

Problemas sobre dígitos

Por Emerson Lucas Soriano Pérez y Carlos Jacob Rubio Barrios

Nivel Avanzado

En la olimpiada de matemáticas, es común que aparezcan problemas que involucran a la suma o al producto de los dígitos de un entero positivo. Si n es un entero positivo, comúnmente se denota por $s(n)$ a la suma de los dígitos de n, por $c(n)$ al número de dígitos de n y por $p(n)$ al producto de los dígitos de n. Comenzamos con un problema de la olimpiada Rusa de 1998.

Ejemplo 1. *¿Existen tres enteros positivos a, b y c tales que $s(a+b) < 5$, $s(b+c) < 5$, $s(a+c) < 5$ y $s(a+b+c) > 50$?*

La respuesta es sí. Supongamos que a, b y c son enteros que satisfacen las relaciones del problema. Entonces, tenemos que cada uno de los números $a+b$, $b+c$ y $a+c$ tiene suma de dígitos a lo más 4. Por lo tanto, su suma, $(a+b)+(b+c)+(a+c) = 2(a+b+c)$ tiene suma de dígitos a lo más 12. Por otro lado, su mitad igual a $a+b+c$ tiene suma de dígitos al menos 51. La única forma en que esto puede suceder es que $a+b+c$ tenga o bien diez 5's y un 1 o bien nueve 5's y un 6. En el primer caso, podemos tomar $a+b+c = 105555555555$ y $2(a+b+c) = 211111111110$ (hay otras posibilidades). Si cada uno de $a+b$, $b+c$ y $a+c$ tiene suma de dígitos igual a 4, como deben sumar $2(a+b+c)$, no puede haber acarreos. Una posibilidad es

$$a+b = 100001110000, \; b+c = 11110000000, \; c+a = 100000001110.$$

De aquí, obtenemos que

$$\begin{aligned} a &= 105555555555 - 11110000000 = 94445555555, \\ b &= 105555555555 - 100000001110 = 5555554445, \\ c &= 105555555555 - 100001110000 = 5554445555, \end{aligned}$$

satisfacen las condiciones del problema.

A continuación veremos algunas propiedades de $s(n)$, $c(n)$ y $p(n)$, así como su aplicación en diversos problemas de olimpiada.

Uso de desigualdades

Teorema 1. *Si n es un entero positivo, entonces*

a) $s(n) \leqslant 9c(n)$,

b) $s(n) \leqslant n$,

c) $p(n) \leqslant n$.

Prueba.

a) Cada dígito de n es menor o igual que 9, entonces, como n tiene $c(n)$ dígitos, la suma de todos ellos es menor o igual que $9c(n)$; esto es, $s(n) \leq 9c(n)$. No es difícil darse cuenta que la igualdad solo es posible cuando todos los dígitos de n son iguales a 9.

b) Consideremos la descomposición decimal del número n:

$$n = \sum_{i=0}^{c(n)-1} a_i \cdot 10^i. \tag{1}$$

Notemos que $a_j \cdot 10^j \geq a_j$ para todo entero no negativo j. Por lo tanto,

$$s(n) = \sum_{i=0}^{c(n)-1} a_i \leqslant \sum_{i=0}^{c(n)-1} a_i \cdot 10^i = n.$$

Así, $s(n) \leqslant n$ con la igualdad si y solo si $c(n) = 1$.

c) Si $c(n) = 1$, claramente la propiedad se cumple, pues en este caso $p(n) = n$, y en consecuencia $p(n) \leq n$. Ahora, analizaremos para $c(n) \geq 2$. En efecto, como cada uno de los dígitos de n es menor o igual que 9, tenemos que

$$a_0 \cdot a_1 \cdots a_{c(n)-2} \leqslant 9^{c(n)-1} < 10^{c(n)-1}. \tag{2}$$

Luego, observando la descomposición decimal de n en (1), tenemos que

$$n \geqslant a_{c(n)-1} \cdot 10^{c(n)-1}. \tag{3}$$

De (2) y (3), se sigue que

$$n \geqslant a_{c(n)-1} \cdot 10^{c(n)-1} > a_{c(n)-1} \cdot a_{c(n)-2} \cdots a_1 \cdot a_0 = p(n).$$

Por lo tanto, $p(n) \leq n$ con la igualdad si y solo si $c(n) = 1$. $\square$

Ejemplo 2. *(Selectivo Argentina - Cono Sur 2006). Hallar todos los enteros positivos n tales que $p(n) = \frac{25}{8}n - 211$.*

Solución. Sabemos que el número $p(n)$ es un entero, así, el número $\frac{25}{8}n-211$ también lo es. Esto implica que n es divisible por 8. También sabemos que $p(n) \geq 0$, por lo tanto

$$\frac{25}{8}n - 211 \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad n \geqslant 68. \tag{4}$$

Por el Teorema 1-c), tenemos que

$$\frac{25}{8}n - 211 \leq n \qquad \Leftrightarrow \qquad n \leq 99. \tag{5}$$

De (4) y (5) se sigue que $68 \leqslant n \leqslant 99$. Como n es divisible por 8, tenemos que $n \in \{72, 80, 88, 96\}$. Luego, comprobando esos cuatro números en la igualdad $p(n) = \frac{25}{8}n - 211$, notamos que solo se cumple para $n = 72$ y $n = 88$. Por lo tanto, los únicos números que cumplen son 72 y 88. $\square$

Teorema 2. *Si n es un entero positivo, entonces*

$$10^{c(n)-1} \leqslant n < 10^{c(n)}.$$

Prueba. Sea A el conjunto de todos los enteros positivos que tienen exactamente $c(n)$ dígitos. Es claro que A es un conjunto acotado[2]. Es fácil darse cuenta que el menor elemento de A es

$$1\underbrace{000\cdots00}_{c(n)-1 \text{ veces}} = 10^{c(n)-1},$$

y que el mayor elemento de A es

$$\underbrace{999\cdots99}_{c(n) \text{ veces}} = 10^{c(n)} - 1.$$

Como n tiene $c(n)$ dígitos, entonces n es elemento de A, y esto implica que n es mayor o igual que el menor elemento de A y menor o igual que el mayor elemento de A, esto es,

$$10^{c(n)-1} \leqslant n < 10^{c(n)},$$

como queríamos probar. $\square$

Ejemplo 3. *Hallar todos los enteros positivos que son iguales a seis veces la suma de sus dígitos.*

Solución. Sea n un entero positivo que cumple dicha propiedad. Lo primero que debemos averiguar es la cantidad de dígitos de n. Por el Teorema 2, tenemos que

$$10^{c(n)-1} \leq n. \tag{6}$$

Por hipótesis tenemos que $n = 6s(n)$, de modo que por el Teorema 1-a) resulta que,

$$n \leq 6(9c(n)) = 54c(n). \tag{7}$$

[2]Un conjunto $B \subset \mathbb{R}$ es acotado si y solo si existen números reales m y M tales que $m \leqslant x \leqslant M$ para todo $x \in B$.

De (6) y (7) tenemos que $10^{c(n)-1} \leqslant 54c(n)$. Es fácil probar que la función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(n) = 10^{n-1} - 54n$ es estrictamente creciente[3] para todo $n \geq 2$. En efecto, notemos que $f(n+1) - f(n) = 9(10^{n-1} - 6)$. Como $10^{n-1} \geq 10 > 6$ para todo entero $n \geq 2$, la desigualdad

$$f(n+1) - f(n) = 9(10^{n-1} - 6) > 0,$$

es verdadera para todo entero $n \geqslant 2$. Esto es suficiente para garantizar que la función f es estrictamente creciente para $n \geqslant 2$. Como $f(3) = -62 < 0$ y $f(4) = 784 > 0$, entonces $f(n) > 0$ para todo entero $n \geq 4$. Esto indica que la desigualdad $10^{c(n)-1} \leqslant 54c(n)$ solo es cierta cuando $c(n) \in \{1, 2, 3\}$. Por lo tanto, n puede tener uno, dos o tres dígitos.

- Si n tiene un dígito, entonces $s(n) = n$, pero según el problema debe cumplirse que $s(n) = 6n$, entonces $n = 6n$. Esto implica que $n = 0$, lo cual es absurdo pues $n > 0$.

- Si n tiene dos dígitos, entonces es de la forma $n = \overline{ab}$. Según el problema, debe cumplirse que $\overline{ab} = 6(a + b)$, entonces $10a + b = 6a + 6b$, esto es, $4a = 5b$. Esto indica que a es un dígito múltiplo de 5, pero como $a \neq 0$, entonces $a = 5$. Por lo tanto, $b = 4$ y $n = 54$.

- Si n tiene tres dígitos, entonces es de la forma $n = \overline{abc}$. Según el problema, se tiene que $\overline{abc} = 6(a+b+c)$, entonces $\overline{abc} = 6(a+b+c)$, esto es, $94a+4b = 5c$. Como $a \geqslant 1$, entonces $5c \geqslant 94 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 94$, esto es, $c \geqslant 19$, lo cual es un absurdo pues $c < 10$.

Por lo tanto, el único número que cumple es 54. $\square$

Ejemplo 4. *(Cono Sur 2016). Hallar todos los enteros positivos n tales que*

$$s(n)(s(n) - 1) = n - 1.$$

Solución. Primero analizaremos las posibles congruencias de n módulo 9. Como $s(n) \equiv n \pmod 9$, tenemos que

$$s(n)\,(s(n) - 1) \equiv n(n - 1) \pmod 9.$$

Por lo tanto, $n-1 \equiv n(n-1) \pmod 9$. Desarrollando y simplificando, esta congruencia es equivalente a $(n-1)^2 \equiv 0 \pmod 9$. De aquí que $n \equiv 1$, 4 o $7 \pmod 9$.
Por el Teorema 2, tenemos que $n - 1 \geq 10^{c(n)-1} - 1$. Usando esta desigualdad y el Teorema 1-a), tenemos que

$$10^{c(n)-1} - 1 \leqslant n - 1 = s(n)\,(s(n) - 1) \leqslant 9c(n)\,(9c(n) - 1)\,,$$

esto es, si n cumple las condiciones del problema, entonces se debe cumplir la desigualdad

$$10^{c(n)-1} - 1 \leqslant 9c(n)(9c(n) - 1). \tag{8}$$

[3]Una función f definida en el conjunto no vacío A es estrictamente creciente si para todo $x, y \in A$, $x > y$ implica que $f(x) > f(y)$.

Consideremos la función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida como sigue:

$$f(n) = 10^{n-1} - 1 - 9n(9n-1) = 10^{n-1} - 81n^2 + 9n - 1.$$

Demostraremos que la función f es estrictamente creciente para $n \geq 4$. Consideremos la función $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$g(n) = \frac{f(n+1) - f(n)}{9} = 10^{n-1} - 18n + 10.$$

Para probar que f es estrictamente creciente para $n \geq 4$, demostraremos por inducción en n que $g(n) > 0$ para todo entero $n \geq 4$.
Notemos que $g(4) = 10^{4-1} - 18 \cdot 4 + 10 = 938 > 0$. Si existe un entero $n \geqslant 4$ tal que $g(n) > 0$, entonces $10^{n-1} > 18n - 10$. Multiplicando por 10 a ambos miembros de la última desigualdad, tenemos que $10^n > 180n - 100$, pero como $n \geq 4$, entonces $180n - 100 > 18(n+1) - 10$, por lo tanto, $10^{n+1} > 18(n+1) - 10$, que es equivalente a afirmar que $g(n+1) > 0$, completando la inducción.
Luego, como $f(4) = -261 < 0$ y $f(5) = 8019 > 0$, entonces podemos concluir que $f(n) > 0$ para todo $n \geq 5$. Así, la desigualdad en (8) solo es cierta cuando $c(n) \in \{1, 2, 3, 4\}$.

- Si $c(n) = 1$, entonces $s(n) = n$ y esto implica que $n(n-1) = n-1$, es decir, $n = 1$.

- Si $c(n) = 2$, entonces n es de la forma $n = \overline{ab}$. Reemplazando en la ecuación original, tenemos que

  $$(a+b)(a+b-1) = \overline{ab} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad (a+b-1)^2 = 9a.$$

  Esto indica que a es un dígito no nulo y que es un cuadrado perfecto, es decir, $a \in \{1, 4, 9\}$. Si $a = 1$, entonces $b = 3$. Si $a = 4$, entonces $b = 3$. Si $a = 9$, entonces $b = 1$. Por lo tanto, en este caso los valores de n son 13, 43 y 91.

- Si $c(n) = 3$, entonces $s(n) \leq 27$ y $n - 1 \geq 99$. Por lo tanto,

  $$s(n)\,(s(n) - 1) = n - 1 \geq 99.$$

  Puesto que,

  $$s(n)\,(s(n) - 1) \geq 99 \quad \Leftrightarrow \quad s(n) \geq 11,$$

  obtenemos la desigualdad $11 \leqslant s(n) \leqslant 27$. No obstante, como $s(n) \equiv 1, 4$ o $7 \pmod 9$, entonces $s(n) \in \{13, 16, 19, 22, 25\}$. Verificando cada uno de estos cinco valores en la ecuación original, vemos que solo cumple $s(n) = 13$, pues reemplazando obtenemos que $n = 157$ y que la suma de los dígitos de 157 es $1 + 5 + 7 = 13$.

- Si $c(n) = 4$, entonces $n - 1 \geq 999$, por lo tanto

  $$s(n)\,(s(n) - 1) = n - 1 \geq 999.$$

Así, $s(n) \geq 33$. Notemos que $s(n) \leq 36$, pues n tiene cuatro dígitos, en consecuencia tenemos las desigualdades $33 \leq s(n) \leq 36$. Como $s(n) \equiv 1, 4$ o $7 \pmod 9$, necesariamente $s(n) = 34$; pero reemplazando en la ecuación original, obtenemos que $n = 1157$, lo cual es un absurdo, pues la suma de los dígitos de 1157 no es 34.

Por lo tanto, los valores de n son 1, 13, 43, 91 y 157. $\square$

Teorema 3. *Si m y n son enteros positivos, entonces $s(m + n) \leq s(m) + s(n)$.*

Prueba. Consideremos las representaciones decimales de m y n:

$$m = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_{c(m)-1} \cdot 10^{c(m)-1},$$
$$n = b_0 + b_1 \cdot 10 + b_2 \cdot 10^2 + \cdots + b_{c(n)-1} \cdot 10^{c(n)-1}.$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $c(m) \geq c(n)$. Definamos $x_i = a_i + b_i$. Si $c(m) > c(n)$, consideramos $b_j = 0$ para todo $c(n) \leq j \leq c(m) - 1$.
Notemos que,

$$m + n = x_0 + x_1 \cdot 10 + x_2 \cdot 10^2 + \cdots + x_{c(m)-1} \cdot 10^{c(m)-1}. \tag{9}$$

Si $x_i \leq 9$ para todo $0 \leq i \leq c(m) - 1$, entonces la igualdad en (9) es la representación decimal de $m + n$; en consecuencia, tenemos que $s(m + n) = s(m) + s(n)$. De lo contrario, existe j tal que $x_j > 9$; consideramos que j es el menor de todos. Así, debemos hacer una corrección en la igualdad en (9) para obtener la representación, pues necesitamos la representación decimal de $m + n$ y poder calcular la suma de sus dígitos. Entonces, por ahora, a x_j le debemos quitar 10 unidades para que pueda ser un dígito de la base decimal y después agregar una unidad a x_{j+1}:

$$m + n = x_0 + x_1 \cdot 10 + \cdots + (x_j - 10) \cdot 10^j + (x_{j+1} + 1) \cdot 10^{j+1} + \cdots \tag{10}$$

Notemos que al corregir una vez la igualdad en (9), la suma $s(m) + s(n)$ disminuye en 10 y aumenta en 1 al mismo tiempo, es decir, $s(m) + s(n)$ disminuye en 9 unidades en total. Procedemos a hacer lo mismo en (10), buscamos el menor j tal que $x_j > 9$ y corregimos de la misma manera que en el paso anterior. Supongamos que este proceso se repitió en total k veces hasta que se logró obtener la representación decimal de $m + n$, entonces la suma de los dígitos de $m + n$ es igual a $s(m) + s(n) - 9k$, es decir, $s(m+n) \leq s(m)+s(n)-9k$. Luego, como $k \geq 1$, entonces $s(m+n) < s(m)+s(n)$. Por lo tanto, $s(m + n) \leq s(m) + s(n)$ y la igualdad ocurre si y solo si al sumar los números m y n de la forma usual (por columnas), no hay acarreo. $\square$

Corolario 1. *Si $n \geqslant 2$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son enteros positivos, entonces*

$$s(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \leq s(a_1) + s(a_2) + \cdots + s(a_n).$$

Prueba. La demostración será por inducción en n. Para $n = 2$ ya está demostrado, pues es el Teorema 3. Supongamos que este resultado es válido para algún número entero $\ell \geq 2$, demostraremos que el resultado también es válido para $\ell + 1$. En efecto, sean $a_1, a_2, \ldots, a_\ell, a_{\ell+1}$ enteros positivos arbitrarios. Por el Teorema 3, tenemos que

$$s(a_1 + a_2 + \cdots + a_\ell + a_{\ell+1}) \leq s(a_1 + a_2 + \cdots + a_\ell) + s(a_{\ell+1}), \tag{11}$$

y como supusimos que el resultado es válido para ℓ, entonces

$$s(a_1 + a_2 + \cdots + a_\ell) \leq s(a_1) + s(a_2) + \cdots + s(a_\ell). \tag{12}$$

Luego, de (11) y (12), deducimos que

$$s(a_1 + a_2 + \cdots + a_\ell + a_{\ell+1}) \leqslant s(a_1) + s(a_2) + \cdots + s(a_\ell) + s(a_{\ell+1}),$$

con la igualdad si y solo si al sumar los números $a_1, a_2, \ldots, a_\ell, a_{\ell+1}$, no hay acarreo. □

Corolario 2. *Si a y b son enteros positivos, entonces $s(ab) \leqslant as(b)$.*

Prueba. Por el Corolario 1, tenemos que

$$s(ab) = s(\underbrace{b + b + \cdots + b}_{a \text{ veces}}) \leq \underbrace{s(b) + s(b) + \cdots + s(b)}_{a \text{ veces}} = as(b),$$

esto es, $s(ab) \leq as(b)$. □

Comentario. Cabe mencionar que en este corolario, la igualdad ocurre si y solo si al sumar los a números b, no hay acarreo. Dicho de otro modo, si k es un dígito de b, entonces $ak \leqslant 9$, esto es, $k \leq \frac{9}{a}$.

Teorema 4. *Si a y b son enteros positivos, entonces $s(ab) \leq s(a)s(b)$.*

Prueba. Notemos que $s(10^j \cdot m) = s(m)$ para cualesquiera enteros positivos m y j. Ahora, consideremos la representación decimal de a:

$$a = x_0 + x_1 \cdot 10 + x_2 \cdot 10^2 + \cdots + x_{c(a)-1} \cdot 10^{c(a)-1}.$$

Entonces,

$$ab = (bx_0) + (bx_1) \cdot 10 + (bx_2) \cdot 10^2 + \cdots + (bx_{c(a)-1}) \cdot 10^{c(a)}.$$

Por el Corolario 1, tenemos que

$$s(ab) \leq \sum_{i=0}^{c(a)-1} s(bx_i \cdot 10^i) = \sum_{i=0}^{c(a)-1} s(bx_i). \tag{13}$$

Por el Corolario 2, tenemos que

$$\sum_{i=0}^{c(a)-1} s(bx_i) \leqslant \sum_{i=0}^{c(a)-1} x_i s(b) = \left(\sum_{i=0}^{c(a)-1} x_i \right) s(b) = s(a)s(b). \tag{14}$$

De (13) y (14), se sigue el resultado. La igualdad ocurre si y solo si se cumplen las siguientes dos condiciones de manera simultánea:

- Cada dígito r de b, cumple que $rx_i \leqslant 9$, para todo $i = 0, 1, \ldots, c(a) - 1$.
- Al sumar los números $(bx_0), (bx_1) \cdot 10, \ldots, (bx_{c(a)-1}) \cdot 10^{c(a)}$, no hay acarreo.

En conclusión, para que se tenga que $s(ab) = s(a)s(b)$, entonces al multiplicar a y b de la manera usual, en ningún momento del proceso debe haber acarreo. $\square$

Ejemplo 5. *Sea n un entero positivo.*

$a)$ *Determinar el mayor valor que puede tomar la expresión* $\dfrac{s(n)}{s(2n)}$.

$b)$ *Determinar el mayor valor que puede tomar la expresión* $\dfrac{s(n)}{s(4n)}$.

Solución. $a)$ Usando el Teorema 4, tenemos que

$$s(10n) = s(5 \cdot 2n) \leqslant s(5)s(2n) = 5s(2n).$$

Pero, como $s(10n) = s(n)$, entonces $s(n) \leqslant 5s(2n)$. Así, $\frac{s(n)}{s(2n)} \leqslant 5$. Es claro que podemos conseguir la igualdad haciendo $n = 5$. Por lo tanto, el mayor valor que puede tomar la expresión $\frac{s(n)}{s(2n)}$ es 5.

$b)$ Usando el Teorema 4, tenemos que

$$s(100n) = s(25 \cdot 4n) \leq s(25)s(4n) = 7s(4n).$$

No obstante, como $s(100n) = s(n)$, entonces $s(n) \leqslant 7s(4n)$. En consecuencia, $\frac{s(n)}{s(4n)} \leqslant 7$ y la igualdad es posible conseguirla haciendo $n = 25$. Por lo tanto, el mayor valor que puede tomar la expresión $\frac{s(n)}{s(4n)}$ es 7.

$\square$

Ejemplo 6. *(Lista corta, IMO 2016). Determinar todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes enteros tales que para cualquier entero positivo $n \geq 2016$, el entero $P(n)$ es positivo y $s(P(n)) = P(s(n))$.*

Solución. La respuesta es $P(x) = c$ donde $1 \leq c \leq 9$ es un entero o $P(x) = x$.
Consideraremos tres casos de acuerdo con el grado de P.
Caso 1: $P(x)$ es un polinomio constante. Sea $P(x) = c$ donde c es un entero. Entonces, la igualdad del problema es en este caso $s(c) = c$. Esto se cumple si y solo si $1 \leq c \leq 9$.
Caso 2: El grado de P es 1. Supongamos que $P(x) = ax + b$ para algunos enteros a y b donde $a \neq 0$. Como $P(n)$ es positivo para valores de n suficientemente grandes, debemos tener que $a \geq 1$. La igualdad del problema en este caso es $s(an + b) = as(n) + b$ para todo $n \geq 2016$. Haciendo $n = 2025$ y $n = 2020$ respectivamente, obtenemos que

$$s(2025a + b) - s(2020a + b) = (as(2025) + b) - (as(2020) + b) = 5a.$$

Por otra parte, de acuerdo con el Teorema 3, tenemos que

$$s(2025a + b) = s((2020a + b) + 5a) \leq s(2020a + b) + s(5a).$$

Esto implica que $5a \leq s(5a)$. Como $a \geq 1$, la desigualdad anterior se cumple cuando $a = 1$, en cuyo caso la igualdad del problema se reduce a $s(n+b) = s(n) + b$ para todo $n \geq 2016$. Entonces, tenemos que

$$s(n+1+b) - s(n+b) = (s(n+1)+b) - (s(n)+b) = s(n+1) - s(n). \quad (15)$$

Si $b > 0$, elegimos n tal que $n + 1 + b = 10^k$ para algún entero k suficientemente grande. Note que todos los dígitos de $n + b$ son nueves, de modo que el lado izquierdo de (15) es igual a $1 - 9k$. Como n es un entero positivo menor que $10^k - 1$, tenemos que $s(n) < 9k$. Por lo tanto, el lado derecho de (15) es al menos $1-(9k-1) = 2-9k$, lo que es una contradicción.
El caso $b < 0$ se puede descartar de manera análoga considerando $n + 1$ como una potencia grande de 10.
Finalmente, es fácil ver que $P(x) = x$ satisface trivialmente la igualdad del problema, de manera que es la única solución en este caso.
Caso 3: El grado de P es mayor o igual que 2. Supongamos que el término principal de P es $a_d x^d$ donde $a_d \neq 0$. Es claro que $a_d > 0$. Consideremos $n = 10^k - 1$ en la igualdad del problema. Entonces, $s(P(n)) = P(9k)$. Notemos que $P(n)$ crece asintóticamente tan rápido como n^d, de manera que $s(P(n))$ crece asintóticamente no más rápido que un múltiplo constante de k. Por otro lado, $P(9k)$ crece asintóticamente tan rápido como k^d. Esto muestra que ambos lados de la última igualdad no pueden ser iguales para valores de k suficientemente grandes ya que $d \geq 2$.
Por lo tanto, concluimos que $P(x) = c$ donde $1 \leq c \leq 9$ es un entero o $P(x) = x$. □

Ejemplo 7. *(Rusia 1999). Si n es un entero positivo tal que $s(n) = 100$ y $s(44n) = 800$, calcular el valor de $s(3n)$.*

Solución. Por el Teorema 4, tenemos que

$$800 = s(44n) \leq s(44)s(n) = 8s(n) = 8 \cdot 100 = 800.$$

Como en la desigualdad de arriba se da la igualdad, entonces para cualquier dígito k de n, se debe cumplir que $4k \leqslant 9$, o sea $k = 0, 1$ o 2. Luego, si k es un dígito cualquiera de n, entonces $3k$ es menor que 9; en consecuencia, $s(3n) = 3s(n) = 3 \cdot 100 = 300$. □

Ejemplo 8. *Si $n > 0$ es un entero tal que $s(n) = 2$, ¿cuál es el mayor valor de $s(n^{10})$?*

Solución. Si $s(n) = 2$, entonces existen enteros no negativos x_1 y x_2 (no necesariamente distintos), tales que $n = 10^{x_1} + 10^{x_2}$. Luego,

$$n^{10} = \sum_{j=0}^{10} \binom{10}{j} \cdot 10^{(10-j)x_1 + jx_2}. \quad (16)$$

Usando el Teorema 3 en (16), tenemos que

$$s(n^{10}) \leq \sum_{j=0}^{10} s\left(\binom{10}{j} \cdot 10^{(10-j)x_1 + jx_2}\right) = \sum_{j=0}^{10} s\left(\binom{10}{j}\right). \quad (17)$$

Puesto que $\binom{10}{j} = \binom{10}{10-j}$ para todo $j = 0, 1, \ldots, 10$, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{10} s\left(\binom{10}{j}\right) &= 2\sum_{j=0}^{4} s\left(\binom{10}{j}\right) + s\left(\binom{10}{5}\right) \\ &= 2[s(1)+s(10)+s(45)+s(120)+s(210)]+s(252) \\ &= 2(1+1+9+3+3)+9 \\ &= 43\end{aligned} \tag{18}$$

Por lo tanto, de (17) y (18) se sigue que $s(n^{10}) \leq 43$. Para demostrar que efectivamente 43 es el mayor valor de $s(n^{10})$, basta tomar $n = 11$, pues $11^{10} = 25937424601$ y la suma de los dígitos de 11^{10} es 43. □

Construcciones y Existencias

Ejemplo 9. *Demostrar que existen infinitos enteros positivos n tales que*

$$p(n) = (s(n))^2.$$

Solución. Sea $k \geqslant 5$ un entero arbitrario. Es fácil probar que $2^k > 4k$.
Consideremos el número:

$$u_k = \underbrace{1111\cdots111}_{2^k-4k \text{ veces}}\underbrace{444\cdots44}_{k \text{ veces}}.$$

Notemos que $p(u_k) = 4^k$ y $s(u_k) = (2^k - 4k) + 4k = 2^k$. Como $(2^k)^2 = 4^k$, tenemos que $p(u_k) = (s(u_k))^2$. Así, el número u_k cumple las condiciones deseadas. Para concluir el problema, basta tomar todos los términos de la sucesión $\{u_k\}_{k\geqslant 5}$, pues esta sucesión tiene infinitos términos y cada uno de ellos cumple lo pedido. □

Ejemplo 10. *¿Existe alguna progresión aritmética de enteros positivos, que sea infinita y estrictamente creciente, tal que todos sus términos tengan la misma suma de dígitos?*

Solución. La respuesta es no. En efecto, supongamos que sí existe tal progresión y sean a el primer término de la progresión y t la cantidad de dígitos de a. Si d es la diferencia común de la progresión, entonces $d > 0$, pues la progresión aritmética es estrictamente creciente. Luego, el siguiente número $a + 10^t d$ también es término de la progresión. Sin embargo, $s(a+10^t d) = s(a)+s(d)$. Pero como todos los términos tienen la misma suma de dígitos, entonces $s(a) + s(d) = s(a)$, lo cual implica que $s(d) = 0$, lo cual es un absurdo, ya que $d > 0$. Por lo tanto, no existe tal progresión. □

Teorema 5. *Todo entero positivo tiene un múltiplo de la forma* $111\ldots11000\ldots00$.

Prueba. Sea n un entero positivo arbitrario. Consideremos la sucesión de $n+1$ números:

$$1,\ 11,\ 111,\ \ldots,\ \underbrace{111\ldots11}_{(n+1)\text{ veces}}$$

Por el principio de las casillas, existen dos números de la sucesión que dejan el mismo residuo al dividirse entre n, esto es, existen $i > j$ tales que

$$\underbrace{111\ldots11}_{i \text{ veces}} \equiv \underbrace{111\ldots11}_{j \text{ veces}} \pmod{n} \qquad \Leftrightarrow \qquad \underbrace{111\ldots11}_{(i-j) \text{ unos}}\underbrace{000\ldots00}_{j \text{ ceros}} \equiv 0 \pmod{n}.$$

Por lo tanto, el número $\underbrace{111\ldots11}_{(i-j) \text{ unos}}\underbrace{000\ldots00}_{j \text{ ceros}}$ es múltiplo de n y está formado únicamente por los dígitos 0 y 1. □

Comentario. Si n es un entero positivo impar y no es divisible por 5, entonces el número

$$\underbrace{111\ldots11}_{(i-j) \text{ unos}},$$

es divisible por n. Por lo tanto, cualquier entero positivo impar que no es múltiplo de 5 tiene un múltiplo formado únicamente por dígitos 1.

Ejemplo 11. *Demuestre que todo entero positivo tiene un múltiplo cuya suma de dígitos es impar.*

Solución. Sea n un entero positivo arbitrario. Por el Teorema 5, existe un entero positivo k tal que nk es de la forma:

$$\underbrace{111\ldots11}_{a \text{ unos}}\underbrace{000\ldots00}_{b \text{ ceros}},$$

Si a es impar, terminamos, pues se tendría que la suma de los dígitos de nk es impar. Si a es par, consideremos los siguientes números:

$$A = \underbrace{999\ldots99}_{a \text{ unos}}\underbrace{000\ldots00}_{b \text{ ceros}} \quad \text{ y } \quad B = \underbrace{111\ldots11}_{a \text{ unos}}\underbrace{000\ldots00}_{b+1 \text{ ceros}}.$$

Es claro que ambos números son múltiplos de n, por lo tanto, la suma $A + B$ también lo es, pero, como

$$A + B = 2\underbrace{111\ldots11}_{a-2 \text{ unos}}09\underbrace{000\ldots00}_{b \text{ ceros}},$$

tenemos que $s(A + B) = 2 + (a - 2) + 9 = a + 9$. Dado que a es un número par, se sigue que $s(A + B)$ es impar. □

Ejemplo 12. *(Emerson Soriano). Un entero positivo n es llamado* sensacional *si existe un entero positivo múltiplo de 792 tal que la suma de sus dígitos es igual a n. Por ejemplo, 18 es sensacional, porque 5544 es múltiplo de 792 y la suma de los dígitos de 5544 es $5 + 5 + 4 + 4 = 18$.*
Encontrar todos los enteros positivos que son sensacionales.

Solución. Comenzamos con un lema.

Lema 1. *Solo los enteros positivos pares y los enteros impares mayores o iguales que 11 cumplen que son iguales a la suma de los dígitos de algún múltiplo de 11.*

Prueba. Sea n un entero positivo. Notemos que el siguiente número:

$$w = \underbrace{1111\ldots 1111}_{2n \text{ veces}},$$

es divisible por 11, pues

$$w = 11(10^{2n-2} + 10^{2n-4} + \cdots + 10^2 + 1).$$

Esto nos muestra que existe un múltiplo de 11 cuya suma de dígitos es $2n$. Por lo tanto, todo número par es la suma de los dígitos de algún múltiplo de 11.
Por otro lado, consideremos el número:

$$q = 506\underbrace{111\ldots 11}_{2t\ veces} = 506 \cdot 10^{2t} + \underbrace{111\ldots 11}_{2t\ veces}.$$

Podemos notar que q es múltiplo de 11, ya que 506 y $\underbrace{111\ldots 11}_{2t\ veces}$ son ambos múltiplos de 11. Además, $s(q) = 2t + 11$. Como t es un entero no negativo, entonces cualquier impar mayor o igual que 11 es la suma de los dígitos de algún múltiplo de 11.
Solo falta demostrar que no existe ningún múltiplo de 11 cuya suma de dígitos es 1, 3, 5, 7 o 9. En efecto, para cada entero positivo m, sean $A(m)$ la suma de los dígitos de m en posición impar y $B(m)$ la suma de todos los dígitos de m en posición par. Por ejemplo, $A(12345) = 5 + 3 + 1 = 9$ y $B(12345) = 4 + 2 = 6$. Es claro que $s(m) = A(m) + B(m)$ y $n \equiv A(m) - B(m) \pmod{11}$. Supongamos que existe un entero positivo m, divisible por 11, tal que $s(m) = j$ para algún $j \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Entonces, como $A(m) + B(m) = j$ y $A(m) \equiv B(m) \pmod{11}$, tenemos que

$$A(m) \equiv j - A(m) \pmod{11} \quad \Leftrightarrow \quad A(m) \equiv \frac{11 + j}{2} \pmod{11},$$

pero $j \leq 9$ implica que $j < \frac{11+j}{2} < 11$, por lo tanto, $\frac{11+j}{2}$ es un residuo módulo 11. En consecuencia, $A(m) \geqslant \frac{11+j}{2} > j$, pero esto contradice la igualdad $A(m) + B(m) = j$. Por lo tanto, solo los impares mayores o iguales que 11 son iguales a la suma de los dígitos de algún múltiplo de 11. $\square$

Con respecto al problema, notemos que $792 = 8 \cdot 9 \cdot 11$. Luego, si n es un número sensacional, entonces n es la suma de los dígitos de un múltiplo de 9, y, por ende, n también debe ser un múltiplo de 9. También debemos notar que n es la suma de los dígitos de un múltiplo de 11. Luego, por el lema anterior, n es par o es impar mayor o igual que 11.

- Si n es par, entonces n es múltiplo de 18. Consideremos el número:

  $$T_1 = \underbrace{111\ldots 11}_{n \text{ veces}}000,$$

  el cual es múltiplo de 8, 9 y 11; por lo tanto, T_1 es múltiplo de 792 y, además, la suma de sus dígitos es n.

- Si n es impar mayor o igual que 11, entonces $n = 9k$, para algún impar $k \geq 3$. Consideremos el número:

$$T_2 = 10989\underbrace{111\ldots11}_{9(k-3)\text{ veces}}000 = 10989 \cdot 10^{9k} + \underbrace{111\ldots11}_{9(k-3)\text{ veces}} \cdot 10^3.$$

Es claro que T_2 es divisible por 8 y 9. Como $10989 = 11 \cdot 999$, entonces 10989 es divisible por 11. También es fácil darse cuenta que el número $\underbrace{111\ldots11}_{9(k-3)\text{ veces}}$ es divisible por 11, pues $9(k-3)$ es par. Por lo tanto, T_2 es múltiplo de 11. De este modo, tenemos que T_2 es divisible por 792, y, además, la suma de sus dígitos es $9k$.

Por lo tanto, los números sensacionales son todos los números de la forma $9k$, donde k es cualquier entero positivo mayor que 1. □

Ejemplo 13. *Probar que existe una potencia de* 2 *que en su representación decimal contiene una sucesión de* 2017 *dígitos consecutivos iguales a cero.*

Solución. Para cada entero positivo t, definamos la función $f(t) = t - c(2^t)$. Vamos a demostrar que la función f toma valores tan grandes como se quiera. En efecto, ya que $2^{10} < 10^4$, tenemos que $2^{10w} < 10^{4w}$ para todo entero positivo w. Esto indica que $c(2^{10w}) < 4w$. Luego, $f(10w) = 10w - c(2^{10w}) > 10w - 4w = 6w$. Como w es un entero positivo arbitrario, podemos tomar w tan grande como se quiera, y, en consecuencia, $f(t)$ es tan grande como se desee.
Ahora, consideremos un entero positivo n tal que $f(n) \geq 2017$. Si observamos la siguiente sucesión:

$$2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ \ldots\ ,\ 2^{10^n},$$

por el principio de las casillas, existen índices $0 \leqslant j < i \leqslant 10^n$ tales que $2^i \equiv 2^j \pmod{10^n}$. Luego,

$$2^i \equiv 2^j \pmod{10^n} \Rightarrow 2^{i-j} \equiv 1 \pmod{5^n} \Rightarrow 2^{i-j+n} \equiv 2^n \pmod{10^n}.$$

La congruencia $2^{i-j+n} \equiv 2^n \pmod{10^n}$ nos indica que en los últimos n dígitos de 2^{i-j+n} hay $n - c(2^n)$ dígitos consecutivos iguales a 0 y, como $n - c(2^n) \geq 2017$, entonces 2^{i-j+n} es la potencia de 2 que estamos buscando. □

Ejemplo 14. *Probar que todo entero positivo* n *tiene un múltiplo cuya suma de dígitos es igual a* n*.*

Solución. Sea n un entero positivo arbitrario y sean x, y, k, enteros no negativos, tales que $n = 2^x \cdot 5^y \cdot k$, donde k es un número impar no divisible por 5. A continuación construiremos un múltiplo de n cuya suma de dígitos es igual a n. En efecto, como k y 10 son coprimos, entonces por el teorema de Euler, tenemos que $10^{\phi(k)} \equiv 1 \pmod{k}$, y, en consecuencia, $10^{\phi(k)\cdot h} \equiv 1 \pmod{k}$ para cualquier entero no negativo h. Luego,

$$A = 1 + 10^{\phi(k)} + 10^{2\phi(k)} + \cdots + 10^{(n-1)\phi(k)} \equiv n \pmod{k};$$

pero como k divide a n, entonces A es divisible por k. Note que entre los dígitos de A hay exactamente n dígitos iguales a 1 y los restantes son iguales a 0, así, $s(A) = n$. Luego, el número que estamos buscando es $A \cdot 10^{\text{máx}(x,y)}$, pues es divisible por n y la suma de sus dígitos es n. $\square$

Ejemplo 15. *Probar que existen infinitos enteros positivos que son divisibles por la suma y el producto de sus dígitos.*

Solución. Para cada entero positivo k, sea u_k el número formado por 3^k dígitos iguales a 1, es decir,

$$u_k = \underbrace{111\ldots11}_{3^k \text{ veces}}.$$

Es fácil notar que para todo entero positivo n, u_n es divisible por el producto de sus dígitos, pues ese producto es igual a 1. Demostraremos por inducción en n que u_n es divisible por la suma de sus dígitos, esto es, probaremos que u_n es divisible por 3^n para todo entero positivo n. En efecto, para el caso $n = 1$, sabemos que el número $u_1 = 111$ es divisible por 3. Supongamos que existe un entero positivo k tal que u_k es divisible por 3^k.
Observemos que,

$$u_{k+1} = \underbrace{111\ldots11}_{3^{k+1} \text{ veces}} = \underbrace{111\ldots11}_{3^k \text{ veces}}\underbrace{111\ldots11}_{3^k \text{ veces}}\underbrace{111\ldots11}_{3^k \text{ veces}} = u_k(10^{2\cdot 3^k} + 10^{3^k} + 1).$$

Como $10^{3^k} \equiv 1 \pmod 3$, el número $10^{2\cdot 3^k} + 10^{3^k} + 1$ es divisible por 3. En consecuencia, el número $u_k(10^{2\cdot 3^k} + 10^{3^k} + 1)$ es divisible por 3^{k+1}, completando así la inducción. Para terminar con el problema, basta con tomar la colección de números $\{u_n\}_{n\geq 1}$, pues esa colección es infinita y cada uno de esos números es divisible por la suma y el producto de sus respectivos dígitos. $\square$

Ejemplo 16. *(Rioplatense, Nivel 2, 2012). Encontrar el menor entero positivo n tal que*

$$s(n) = s(2n) = s(3n) = \cdots = s(2012n).$$

Solución. Sea n el número que buscamos. Primero demostraremos que $c(n) \geq 4$. En efecto,

- Si $c(n) = 1$, entonces $s(n) = n$ y $s(11n) = 2n$, pero esto implica que $n = 2n$, es decir, $n = 0$, lo cual es un absurdo, ya que n es positivo.

- Si $c(n) = 2$, entonces n es de la forma $n = \overline{ab}$. Luego, como

  $$s(\overline{ab}) = s(101\overline{ab}) = s(\overline{abab}),$$

  entonces $a + b = 2(a + b)$, es decir, $a + b = 0$, pero esto también es un absurdo ya que $a + b \geq 1$.

- Si $c(n) = 3$, entonces n es de la forma $n = \overline{abc}$. Luego, como

  $$s(\overline{abc}) = s(1001\overline{abc}) = s(\overline{abcabc}),$$

  entonces $a + b + c = 2(a + b + c)$, implicando que $a + b + c = 0$, pero esto nuevamente es un absurdo, pues es claro que $a + b + c \geq 1$.

Por lo tanto, $c(n) \geq 4$. Supongamos que $c(n) = 4$ y sea $\overline{a_1a_2 \ldots a_k}$ la representación decimal de n. Notemos que $1001\overline{a_1a_2a_3a_4} = \overline{a_1a_2a_3a_4000} + \overline{a_1a_2a_3a_4}$, luego, al sumar los números $\overline{a_1a_2a_3a_4000}$ y $\overline{a_1a_2a_3a_4}$, obtenemos

$$\begin{array}{r} \overline{a_1\ \ a_2\ \ a_3\ \ a_4\ \ 0\ \ 0\ \ 0}\ + \\ \overline{a_1\ a_2\ a_3\ a_4} \\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ - \\ \overline{\ldots\ a_2\ a_3\ a_4} \end{array}$$

donde podemos observar que $a_4 + a_1 > 9$, pues de lo contrario, tendríamos que

$$1001n = \overline{a_1a_2a_3(a_1 + a_4)a_2a_3a_4},$$

lo cual implica que $s(1001n) > s(n)$, que es un absurdo.
Si $a_3 < 9$, tenemos que

$$1001n = \overline{a_1a_2(a_3 + 1)(a_1 + a_4 - 10)a_2a_3a_4},$$

pero entonces $s(1001n) > s(n)$, lo cual es un absurdo. Así, $a_3 = 9$.
Si $a_2 < 9$, entonces

$$1001n = \overline{a_1(a_2 + 1)0(a_1 + a_4 - 10)a_2a_3a_4},$$

de donde claramente $s(1001n) > s(n)$, lo cual es un absurdo. Por lo tanto, $a_2 = 9$.
Si $a_1 < 9$, entonces

$$1001n = \overline{(a_1 + 1)00(a_1 + a_4 - 10)a_2a_3a_4},$$

pero entonces $s(1001n) > s(n)$, que también es un absurdo. Por lo tanto, $a_1 = 9$.
Como ya sabemos que $a_1 = a_2 = a_3 = 9$, entonces al calcular nuevamente $1001n$, tenemos que $1001n = \overline{1000(a_4 - 1)99a_4}$. Luego, como $s(1001n) = s(n)$, se sigue que

$$s(\overline{1000(a_4 - 1)99a_4}) = s(\overline{999a_4}) \quad \Leftrightarrow \quad 2a_4 + 18 = a_4 + 27,$$

lo cual implica que $a_4 = 9$. Basta demostrar que el número 9999 satisface las condiciones del problema para concluir que es el número buscado. En efecto, sea k un entero tal que $1 \leq k \leq 2012$. Si k es múltiplo de 10, entonces $9999k$ también es múltiplo de 10 y por lo tanto, $9999k = 10k'$ para algún entero positivo k'. Entonces, $s(9999k) = s(10k') = s(k') = s(9999\frac{k}{10})$. Luego, podemos suponer que k no es múltiplo de 10. Como $k < 10000$, se sigue que k es de la forma $k = \overline{abcd}$ donde a, b, c y d son dígitos (por ejemplo, $58 = 0058$). Como $9999 = 10000 - 1$, tenemos que

$$9999k = 10000k - k = \overline{abcd0000} - \overline{abcd}.$$

Además, $0 < d \leq 9$ implica que

$$9999k = \overline{abc(d-1)(9-a)(9-b)(9-c)(10-d)}.$$

Así, $s(9999k) = a + b + c + (d-1) + (9-a) + (9-b) + (9-c) + (10-d) = 36$ donde k es cualquier entero entre 1 y 2012, inclusive. ☐

Ejemplo 17. *(Emerson Soriano - Lista Corta Cono Sur 2013). Una sucesión estrictamente creciente e infinita de enteros positivos es llamada n-*elegante *si se cumplen las siguientes dos condiciones:*

- *Cualesquiera dos términos de la sucesión son coprimos.*
- *La suma de los dígitos de cada término de la sucesión es n.*

Demostrar que existen infinitos enteros positivos n para los cuales es posible encontrar una sucesión n-elegante.

Solución. Vamos a demostrar que para todo entero positivo k, siempre es posible encontrar una sucesión 2^k-elegante. En efecto, consideremos el siguiente número

$$a = \sum_{i=0}^{2^k-1} 10^i.$$

y la sucesión $\{a_i\}_{i \geqslant 1}$ definida por $a_1 = a$ y, para todo entero positivo $i \geqslant 1$,

$$a_{i+1} = \sum_{j=0}^{2^k-1} 10^{j \cdot \phi(P_i)},$$

donde P_i es el producto de todos los divisores primos del producto $a_1 a_2 \cdots a_i$. Es fácil notar que dicha sucesión es estrictamente creciente, todos sus términos son coprimos con 10, y además $s(a_i) = n$, para todo entero positivo i.
Si existen $i > j$ tales que a_i y a_j no son coprimos, entonces existe un número primo p tal que a_i y a_j son múltiplos de p. Como p es factor primo de a_j, entonces p divide a P_{i-1}; por tanto, $\phi(P_{i-1})$ es divisible por $\phi(p)$. Luego, como a_j es coprimo con 10, entonces

$$10^{j \cdot \phi(P_{i-1})} = 10^{\phi(p) \cdot \frac{j\phi(P_{i-1})}{\phi(p)}} \equiv 1 \pmod p,$$

para todo $j = 0, 1, \ldots, 2^k - 1$. Así, $a_i \equiv 2^k \pmod p$, pero como a_i también es múltiplo de p, entonces 2^k es múltiplo de p. En consecuencia, $p = 2$, lo cual es un absurdo, pues a_i es impar. De este modo, concluimos que todos los términos de la sucesión mencionada son coprimos dos a dos. Por lo tanto, concluimos que la sucesión $\{a_i\}_{i \geq 1}$ es 2^k-elegante. ☐

Ejemplo 18. *Demostrar que para todo entero positivo n existe un entero positivo k (que depende de n) que satisface simultáneamente las siguientes dos condiciones:*

- *En la representación decimal de 5^k, hay al menos n dígitos iguales a 5.*

- *La suma de los dígitos de k es menor o igual que la suma de los dígitos de n.*

Solución.

Lema 2. *$c(5^m) < m$ para todo entero $m \geq 4$.*

Prueba. Es claro que si w es un entero positivo, entonces $c(5w) = c(w)$ o $c(w)+1$, ya que $5w < 10w$ y $c(10w) = c(w) + 1$. Esto muestra que en la sucesión de las potencias de 5, la cantidad de dígitos de un término que no sea el primero, tiene un dígito más que el término anterior o se mantiene. Por lo tanto, como $5^4 = 625$, entonces $c(5^4) < 4$. En consecuencia, $c(5^m) < m$ para todo entero $m \geq 4$. □

Lema 3. *$m - c(5^m) \geq 3$ para todo entero $m \geq 10$.*

Prueba. Notemos que $5^{10} = 9765625$ y $10 - c(5^{10}) = 3$. Luego, si un entero positivo $t \geq 10$ cumple que $t - c(5^t) = 3$, entonces $(t+1) - c(5^{t+1}) \geq t+1-(c(5^t)+1) = 3$ (note que el Lema 2 implica que $t - c(5^t) > 0$ para cualquier entero $t \geq 10$). Por lo tanto, si $m \geq 10$, entonces $m - c(5^m) \geq 3$. □

Con respecto al problema, haremos la demostración por inducción en n. Observemos que para $n = 1$, basta tomar $k = 1$, pues 5^1 tiene al menos un dígito 5 y $1 = s(k) \leq s(n) = 1$. Para $n = 2$, basta tomar $k = 10$, pues $5^{10} = 9765625$ tiene al menos $n = 2$ dígitos iguales a 5 y $1 = s(k) = s(10) \leq s(n) = s(2) = 2$.
Supongamos que existe un entero $n \geq 3$ que satisface las dos condiciones, esto es, existe un entero positivo k tal que 5^k tiene al menos n dígitos iguales a 5 y $s(k) \leq s(n)$. Debemos probar que $n+1$ satisface ambas condiciones del problema. En efecto, como $n \geq 3$, k no puede ser igual a ninguno de los enteros del 1 al 9, pues ninguno de los números $5, 5^2, 5^3, \ldots, 5^9$ tiene al menos tres dígitos iguales a 5. Por lo tanto, $k \geq 10$ y por el Lema 3 se cumple que $k - c(5^k) \geq 3$.
Como 5 y $2^{c(5^k)}$ son coprimos, entonces $5^{2^{c(5^k)-1}} = 5^{\phi(2^{c(5^k)})} \equiv 1 \pmod{2^{c(5^k)}}$, pero como $2^{c(5^k)-1} \mid 10^{c(5^k)}$, entonces $5^{10^{c(5^k)}} \equiv 1 \pmod{2^{c(5^k)}}$, es decir, el número $\frac{5^{10^{c(5^k)}}-1}{2^{c(5^k)}}$ es un entero positivo.
Analicemos el siguiente número:

$$E = \left(5^{k-c(5^k)} \times \frac{5^{10^{c(5^k)}}-1}{2^{c(5^k)}}\right) \times 10^{c(5^k)}.$$

Simplificando E, obtenemos que $E = 5^{k+10^{c(5^k)}} - 5^k$. Por lo tanto,

$$\left(5^{k-c(5^k)} \times \frac{5^{10^{c(5^k)}}-1}{2^{c(5^k)}}\right) \times 10^{c(5^k)} + 5^k = 5^{k+10^{c(5^k)}} \tag{19}$$

Demostraremos que, para que $n+1$ cumpla la propiedad, basta con tomar $k_0 = k + 10^{c(5^k)}$. Por el Teorema 3, tenemos que

$$s(k + 10^{c(5^k)}) \leqslant s(k) + s(10^{c(5^k)}) = s(k) + 1 \leq s(n) + 1.$$

Ahora, solo falta probar que el número $5^{k+10^{c(5^k)}}$ tiene al menos $n+1$ dígitos iguales a 5. En efecto, notemos que en el lado izquierdo de la igualdad (19), el primer sumando termina en $c(5^k)$ ceros. Esto quiere decir que al sumar ambos sumandos en (19) no hay acarreo.
Por otro lado, notemos que

$$5^{10^{c(5^k)}} - 1 = \left(\prod_{i=1}^{c(5^k)} (5^{\frac{10^{c(5^k)}}{2^i}} + 1) \right) (5^{5^{c(5^k)}} - 1) \tag{20}$$

Como $5^i + 1 \equiv 2 \pmod 4$ para cualquier entero positivo i, entonces

$$\nu_2 \left(\prod_{i=1}^{c(5^k)} (5^{\frac{10^{c(5^k)}}{2^i}} + 1) \right) = c(5^k), \tag{21}$$

donde $\nu_2(a)$ denota al mayor entero no negativo tal que $2^{\nu_2(a)} \mid a$ siendo a un entero positivo.
Es claro que si w es un entero positivo impar, entonces $5^w - 1 = 4(5^{w-1} + 5^{w-2} + \cdots + 5 + 1)$, pero como $\left(5^{w-1} + 5^{w-2} + \cdots + 5 + 1\right)$ es impar, resulta que $\nu_2(5^w - 1) = 2$. En particular,

$$\nu_2 \left(5^{5^{c(5^k)}} - 1 \right) = 2. \tag{22}$$

De (20), (21) y (22), concluimos que

$$\nu_2 \left(5^{10^{c(5^k)}} - 1 \right) = c(5^k) + 2.$$

Luego, como $k - c(5^k) \geq 3$, entonces $k > \nu_2 \left(5^{10^{c(5^k)}} - 1 \right)$. Así, tenemos que

$$k - c(5^k) > \nu_2 \left(5^{10^{c(5^k)}} - 1 \right) - c(5^k).$$

Esta última desigualdad muestra que el número

$$5^{k-c(5^k)} \times \frac{5^{10^{c(5^k)}} - 1}{2^{c(5^k)}},$$

cumple que su último dígito distinto de cero es 5. Por lo tanto, en la igualdad (19) se concluye que el número $5^{k+10^{c(5^k)}}$ tiene al menos $n+1$ dígitos iguales a 5, ya que por hipótesis el número 5^k tiene al menos n dígitos iguales a 5, quedando completa la inducción. $\square$

Problemas Propuestos

Problema 1 (Putnam, 1956)**.** *Demuestra que todo entero positivo tiene un múltiplo que en su representación decimal, contiene al menos una vez a todos los dígitos del* 0 *al* 9*, inclusive.*

Problema 2 (Cono Sur, 1998). *Demuestra que al menos el* $30\,\%$ *de los elementos del conjunto*

$$\{1, 2, 3, \ldots, 10^6\},$$

cumplen que el primer dígito de 2^n*, en su representación decimal, es* 1.

Problema 3 (Rusia, 1999). *¿Existen* 19 *enteros positivos, con igual suma de dígitos, tales que la suma de todos ellos es igual a* 1999*?*

Problema 4 (Cono Sur, 2000). *Demuestra que para cada entero positivo* n*, existe un entero positivo que es divisible por el producto de sus dígitos, tal que ese producto es mayor que* 10^{2000}.

Problema 5 (Cono Sur, 2007). *Demuestra que para cada entero positivo* n*, existe un entero positivo* k *tal que la representación decimal de cada uno de los siguientes números:*

$$k,\ 2k,\ 3k,\ \ldots,\ nk,$$

contiene al menos una vez a todos los dígitos del 0 *al* 9*, inclusive.*

Problema 6 (Selectivo Perú - Cono Sur, 2009). *Determina todos los enteros positivos* n *para los cuales existen cuatro enteros positivos* $a < b < c < d$*, tales que*

$$s(a) = s(b) = s(c) = s(d) = s(a + b + c + d) = n.$$

Problema 7 (OMCC, 2003). *Diremos que un entero positivo es* tico *si la suma de sus dígitos, en el sistema decimal, es múltiplo de* 2003.

$a)$ *Demuestra que existe un entero positivo* N *tal que sus primeros* 2003 *múltiplos (positivos):* $N, 2N, 3N, \ldots, 2003N$*, son todos ticos.*

$b)$ *¿Existe algún entero positivo* N *tal que todos sus múltiplos sean ticos?*

Problema 8 (Cono Sur, 2008). *Determina todos los enteros positivos que tienen al menos un múltiplo que es un número capicúa*[4].

Problema 9 (Iberoamericana, 2016). *Sean* k *un entero positivo y* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *dígitos. Demuestra que existe un entero positivo* n *tal que los* $2k$ *últimos dígitos de* 2^n *son, en algún orden,* $a_1, a_2, \ldots, a_k$*,* $b_1, b_2, \ldots, b_k$*, para ciertos dígitos* $b_1, b_2, \ldots, b_k$.

Problema 10 (Selectivo Perú - Cono Sur, 2008). *Sea* a *y* b *enteros positivos, ninguno de ellos divisible por* 10*. Demuestra que existe un entero positivo* n *tal que* $s(an) > s(bn)$.

Problema 11 (Iberoamericana, 2012). *Demuestra que para todo entero positivo* n*, existen* n *enteros positivos consecutivos tales que ninguno de ellos es divisible por la suma de sus respectivos dígitos.*

[4]Un número *capicúa* es un número que se lee igual de derecha a izquierda que de izquierda a derecha.

Problema 12 (APMO, 2014)**.** *Demuestra que para todo entero positivo n, existen enteros positivos $a_1, a_2, \dots, a_n$ que satisfacen las siguientes condiciones:*

$$s(a_1) < s(a_2) < \cdots < s(a_n) \quad y \quad s(a_i) = p(a_{i+1})$$

para todo $i = 1, 2, \dots, n$, considerando que $a_{n+1} = a_1$.

Problema 13. *Demuestra que para todo entero $k \geqslant 2$, existe una potencia de 2 tal que, entre sus últimos k dígitos, al menos la mitad son iguales a 9.*

Problema 14 (Selectivo Perú - Ibero, 2010)**.** *Determina todos los enteros positivos N para los cuales existen tres enteros positivos a, b, c coprimos dos a dos, tales que*

$$s(ab) = s(bc) = s(ca) = N.$$

Bibliografía

1) Andreescu T., Andrica D. *Number Theory: Structures, Examples and Problems*.

2) Andreescu T., Andrica D., Feng Z. *104 Number Theory Problems*, from the training of the USA IMO team.

3) Andreescu T., Dospinescu G. *Problems from the Book*.

4) Engel A. *Problem Solving Strategies*.

5) Sato N. *Number Theory*.

6) Tipe J., Espinoza Choqquepura C. *V Olimpiada Nacional Escolar de Matemática (2008)*. Perú.

7) Bornsztein P., Caruso X., Nolin P., Tibouchi M. *Cours d-arithmétique*, Premiére Partie.

8) Sierpinski W. *250 Problems in Elementary Number Theory*.

9) Matić I., Petrović N. *The IMO Compendium*, A collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2009.

Problemas de práctica

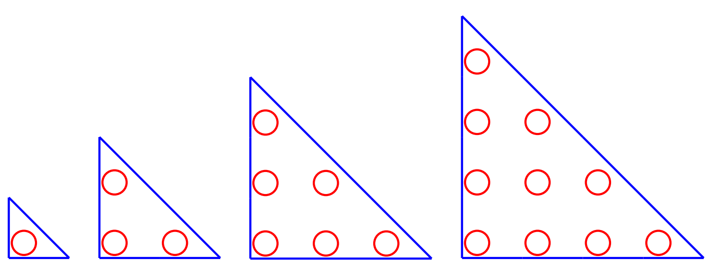
A continuación presentamos los 20 problemas de práctica seleccionados especialmente para este segundo número del año 2017.

Aprovechamos para invitarte a que contribuyas a enriquecer esta sección de la revista. Estamos seguros que conoces problemas interesantes que quieres compartir y por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus propuestas.

Problema 1. El espía Reyes transmite códigos a su base, los cuales están formados por cuatro letras T, tres letras W y cuatro letras G. Por ejemplo, un código podría ser WGTTWGGWTGT, otro código podría ser GTGGWWTWTTG, etc. Sin embargo, para despistar al enemigo, algunos códigos son verdaderos y otros son falsos.

El hacker Germán logra descifrar el sistema y descubre que si en un código aparece alguna letra T antes de alguna letra W (como por ejemplo, WGTGWGGTWTT, en el cual la segunda letra T aparece antes que la tercera letra W), entonces es un código falso, y en caso contrario cuando todas las letras W aparecen antes de todas las letras T, es verdadero. ¿Cuántos códigos verdaderos hay?

Problema 2. Un día, Deeds estaba entretenido acomodando fichas para formar triángulos, como muestra la figura.



En total hizo más de 100 triángulos, siguiendo el patrón.

Drini pasaba por ahí y tras mirar los triángulos le dijo lo siguiente: Deeds, si a la cantidad de fichas en tu último triángulo le restas la cantidad de fichas del penúltimo, con la cantidad de fichas que quedan se podría llenar un triángulo sin que sobren o falten fichas. ¿Cuál es la menor cantidad posible de triángulos que hizo Deeds?

Problema 3. Amanda y Lina jugaban canicas y Lina tenía más canicas que Amanda. Si la cantidad total de canicas es impar y la multiplicación de la cantidad de canicas que tiene Amanda por la cantidad de canicas que tiene Lina es igual a 600, ¿cuántas canicas tenía cada una? Nota: puede haber más de una respuesta, debes hallar todas las posibilidades.

Problema 4. En 22 cartas se escribieron los enteros positivos del 1 al 22. Con estas cartas se hicieron 11 fracciones. ¿Cuál es el mayor número de estas fracciones que pueden ser valores enteros?

Problema 5. Lina, Amanda y Jessica querían comprar sombreros idénticos. Sin embargo, a Lina le faltaba la tercera parte del precio, a Amanda la cuarta parte del precio y a Jessica la quinta parte. En una oferta, cuando el costo total de tres sombreros disminuyó en 9400 pesos, las tres juntaron sus ahorros y cada una pudo comprar un sombrero. Si no les sobró dinero, ¿cuánto costaba un sombrero antes de la reducción de precio?

Problema 6. El área de un triángulo ABC es 40 cm^2. Un punto D sobre el lado AB satisface que $DB = 3AD$, un punto E sobre el lado BC satisface que $EC = 3BE$ y un punto F sobre el lado CA satisface que $FA = 3CF$. Determina el área del triángulo DEF.

Problema 7. Sean a, b, c y d números reales positivos tales que $a + b + c + d = 3$. Demuestra que

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \leq \frac{1}{a^2b^2c^2d^2}.$$

Problema 8. Se quieren colorear cada uno de los números del 1 al 10 con los colores rojo, azul o verde de manera que si a y b cumplen que $a - b$ es impar, entonces a y b tienen colores distintos. ¿De cuántas maneras se puede hacer la coloración?

Problema 9. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tales que $f(1) = 2$ y $f(xy) = f(x) - \frac{f(-y)}{x}$ para cualesquiera números reales x, y distintos de cero.

Problema 10. ¿Es posible escribir los enteros $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ en los vértices de un octágono regular de tal forma que la suma de los enteros en cualesquiera tres vértices consecutivos es mayor que 13?

Problema 11. Un conjunto de torres en un tablero de $n \times n$ (con $n > 1$) es *preciso* si en cualquier fila y en cualquier columna hay al menos una torre y además, si se remueve cualquier torre, queda alguna fila o columna sin torres. ¿Cuál es la máxima cantidad de torres que puede tener un conjunto preciso?

Problema 12. Sea ABC un triángulo acutángulo con gravicentro G. Se denota por D al pie de la altura desde A sobre BC. El rayo DG interseca al circuncírculo del triángulo ABC en X. Demuestra que AX es paralela a BC.

Problema 13. Encuentra el menor entero positivo m tal que 2^{2017} divide a $2017^m - 1$.

Problema 14. Una circunferencia que pasa por el vértice A de un triángulo ABC, con $AB \neq AC$, interseca a los lados AB y AC en los puntos M y N, respectivamente, y al lado BC en los puntos P y Q, donde Q se encuentra entre B y P. Si se cumple que MP es paralela a AC, que NQ es paralela a AB y que $\frac{BP}{CQ} = \frac{AB}{AC}$, ¿cuánto mide el ángulo $\angle BAC$?

Problema 15. Demuestra que si a, b y c son enteros tales que el número

$$\frac{a(a-b) + b(b-c) + c(c-a)}{2}$$

es un cuadrado perfecto, entonces $a = b = c$.

Problema 16. Los enteros positivos M y n son tales que M es divisible por todos los enteros positivos desde el 1 hasta el n pero no es divisible por $n+1$, $n+2$ y $n+3$. Encuentra todos los valores posibles de n.

Problema 17. Sea k un entero positivo fijo. Se define una sucesión $a_1, a_2, \ldots$ de números enteros de la siguiente manera: $a_1 = 1$ y para cada $n \geq 2$, el número a_n es el n-ésimo número mayor que a_{n-1} que cumple que $a_n - n$ es divisible por k. Encuentra el valor de a_{2017}.

Problema 18. Una lista finita de enteros positivos consecutivos es llamada *balanceada* si contiene la misma cantidad de múltiplos de 3 que de múltiplos de 5. Un ejemplo de una lista de longitud 7 que no es balanceada es $30, 31, 32, 33, 34, 35, 36$, pues esta lista contiene 3 múltiplos de 3 ($30, 33, 36$) y solo 2 múltiplos de 5 (30 y 35).
¿Cuál es la longitud máxima de una lista balanceada de enteros positivos consecutivos?

Problema 19. En un triángulo ABC las bisectrices AD y BE se intersecan en el punto G. Si el ángulo en C mide $60°$, demuestra que $DG = GE$.

Problema 20. Demuestra que para cada entero positivo n existen n enteros consecutivos, cada uno de los cuales es divisible por un entero que no divide a ningún otro número de la lista.

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección encontrarás las soluciones a los 20 problemas de práctica elegidos para este número de la revista. Antes de leer estas soluciones, te recomendamos hacer tu propia solución a los problemas o al menos, haberle dedicado un tiempo considerable a cada uno de ellos.

Es muy común en matemáticas que cada problema tenga más de una solución. Las soluciones que presentamos no necesariamente son las mejores o las únicas. Aunque hayas resuelto el problema y estés muy seguro de que tu solución es correcta, te invitamos a leer estas soluciones y discutirlas con tus compañeros. Si logras encontrar una solución diferente a las que aquí presentamos o tienes dudas en tus soluciones, te invitamos a compartirla con nosotros en la dirección electrónica `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. Notemos que todos los códigos tienen longitud 11. Si el código es verdadero, una vez que se indiquen las posiciones ocupadas por la letra G, todas las demás posiciones están fijas: las primeras 3 de dichas posiciones deben ser ocupadas por W y las cuatro restantes por T. De este modo, el número total de códigos verdaderos es equivalente al número total de formas de escoger las posiciones G, lo cual es $\binom{11}{4} = 330$.

Solución del problema 2. Observemos que la cantidad de fichas en el triángulo k es el k-ésimo número triangular[5] $T_k = \frac{k(k+1)}{2}$. Además, si restamos dos números triangulares consecutivos, obtenemos la relación: $T_k - T_{k-1} = k$, pues en la resta sólo sobrevive la última fila del triángulo mayor.
Sin embargo, el planteamiento del problema nos pide que k sea también un número triangular. Como se hicieron más de 100 triángulos, basta con encontrar el primer número triangular mayor a 100 y ese será el valor mínimo buscado. Finalmente, dado

[5] Un número triangular es un número de la forma $1 + 2 + \cdots + k$ para algún entero positivo k.

que $T_{14} = \frac{14 \cdot 15}{2} = 105$ es el primer número triangular mayor a 100, concluimos que se hicieron 105 triángulos.

Solución del problema 3. Queremos encontrar todos los pares de números (a, b) con $a < b$ de manera que $a + b$ sea impar y $ab = 600$. Esto equivale a repartir los factores primos de $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ en dos grupos. Para que la suma sea impar, es necesario que uno de los factores sea par y el otro impar, lo cual solo puede suceder si todos los factores 2 están juntos.

Entonces, tenemos que las posibilidades son:

$$(2^3, 3 \cdot 5^2),\ (2^3 \cdot 3, 5^2),\ (2^3 \cdot 5, 3 \cdot 5),\ (2^3 \cdot 3 \cdot 5, 5),\ (2^3 \cdot 5^2, 3),\ (2^3 \cdot 3 \cdot 5^2, 1),$$

aunque en dicho listado no siempre se cumple que $a < b$; para que esto suceda, basta con intercambiar a y b para obtener una posible solución (como por ejemplo, en el último caso).

Solución del problema 4. Notemos que los números primos $13, 17, 19$ no pueden aparecer en una fracción entera excepto al dividirlos entre 1, de esta manera al menos dos de ellos no forman una fracción entera. Por lo tanto, es imposible que las once fracciones sean enteras. Aseguramos que sí es posible lograr 10 fracciones enteras:

$$\frac{22}{11},\ \frac{21}{3},\ \frac{20}{10},\ \frac{19}{1},\ \frac{18}{9},\ \frac{16}{8},\ \frac{15}{5},\ \frac{14}{7},\ \frac{12}{6},\ \frac{4}{2}.$$

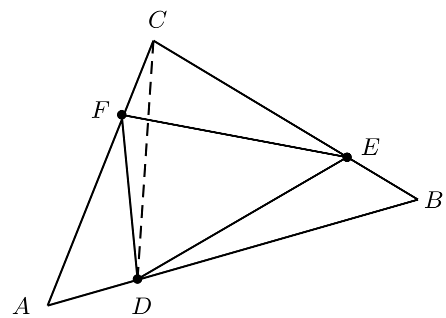
En conclusión, la respuesta es 10. (Note que la onceava fracción es $\frac{13}{17}$).

Solución del problema 5. La cantidad de dinero faltante al inicio es $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}$ del precio de un sombrero. Esta cantidad faltante es precisamente el monto del descuento, de manera que $\frac{47}{60}$ del precio de un sombrero es igual a 9400 pesos, es decir:

$$\frac{47}{60}s = 9400.$$

Resolviendo dicha ecuación, obtenemos que $s = 12000$ pesos es el precio de un sombrero.

Solución del problema 6. Primero determinaremos el área del triángulo BED. Como paso intermedio calcularemos el área del triángulo BCD. De acuerdo con las hipótesis del problema, es claro que $DB = \frac{3}{4}AB$ y $BE = \frac{1}{4}BC$.



Comparando la base AB del triángulo ABC con la base DB del triángulo BCD, observamos que $DB = \frac{3}{4}AB$, mientras que los dos triángulos tienen alturas iguales con respecto a dichas bases. Luego, el área del triángulo BCD es $\frac{3}{4} \cdot 40 = 30$ cm^2.
Podemos aplicar el mismo argumento a los triángulos BCD y BED. La base BE del triángulo BED es $\frac{1}{4}$ de la base BC del triángulo BCD. Las alturas de los triángulos con respecto a esas bases son iguales. Luego, el área del triángulo BED es $\frac{1}{4} \cdot 30 = \frac{15}{2}$ cm^2. De manera análoga podemos deducir que las áreas de los triángulos CFE y ADF miden $\frac{15}{2}$ cm^2. Por lo tanto, el área del triángulo DEF es igual a $40 - 3 \cdot \frac{15}{2} = \frac{35}{2}$ cm^2.

Solución del problema 7. Multiplicando la desigualdad por $a^2b^2c^2d^2$, obtenemos la desigualdad equivalente

$$a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2 \leq 1. \tag{23}$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a \geq b \geq c \geq d$. Utilizando la desigualdad MA-MG con los números positivos a, b y $c + d$, tenemos que

$$ab(c+d) \leq \left(\frac{a+b+(c+d)}{3}\right)^3 = 1,$$

de donde se sigue que $a^2b^2(c+d)^2 \leq 1$.
Por lo tanto, para demostrar la desigualdad (23), basta demostrar que

$$a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2 \leq a^2b^2(c+d)^2.$$

Después de simplificar, esta última desigualdad es equivalente a la desigualdad

$$a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2 \leq 2a^2b^2cd,$$

que a su vez, es la suma de las dos desigualdades evidentes $a^2c^2d^2 \leq a^2b^2cd$ y $b^2c^2d^2 \leq a^2b^2cd$.

Solución del problema 8. Primero notemos que dos números tienen diferencia impar si y solo si tienen distinta paridad, por lo tanto podemos separar a los números en los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ y una coloración válida debe asignar colores a los números en el conjunto A y no repetir esos colores en el conjunto B, esto último también debe cumplirse con los colores de B. Primero contemos las coloraciones con solo dos colores.

Caso 1. Solo dos colores. En este caso, como hay que usar un color distinto para A y B, se tiene que los números de A están coloreados de un color y los de B están coloreados de otro color. Como importa el orden aquí, hay $3 \cdot 2 = 6$ coloraciones posibles.

Caso 2. Los tres colores. En este caso el conjunto A debe tener números de dos colores distintos o B debe tener números de dos colores distintos. Contemos qué pasa en el primer caso. Si en A hay dos colores distintos, debe haber dos subconjuntos A' y A'' ajenos y no vacíos de manera que los números de A' son de un color y los de A'' son de otro color. Luego, hay que contar cuántas particiones de esta forma hay. Como en A hay 5 elementos, la cantidad de parejas de particiones sin que importe el orden es $\frac{2^5-2}{2} = 2^4 - 1 = 15$, donde se restó 2 para no contar al conjunto vacío y al total y se usó que una vez que se definió un conjunto, el otro debe ser su complemento. Dada la partición de A hay $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ asignaciones posibles de colores, luego hay $6 \cdot 15 = 90$ coloraciones en este subcaso, mientras que si el conjunto que se partió fue B dan otras 90 coloraciones.
Por lo tanto, en total hay $90 + 90 + 6 = 186$ coloraciones posibles.

Solución del problema 9. Sustituyendo $x = 1$ en la primera condición, obtenemos que

$$f(y) = f(1) - f(-y) \Leftrightarrow f(y) + f(-y) = f(1) = 2. \tag{24}$$

Sustituyendo $y = -1$, obtenemos que

$$f(-x) = f(x) - \frac{f(1)}{x} = f(x) - \frac{2}{x}. \tag{25}$$

Sustituyendo (24) en (25), se tiene que

$$2 - f(x) = f(x) - \frac{2}{x} \Rightarrow 2f(x) = 2 + \frac{2}{x} \Rightarrow f(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

Entonces, la única posible solución es $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, la cual es fácil ver que cumple las condiciones del problema.

Solución del problema 10. La respuesta es no. Si se asume que los números escritos en los vértices del octágono son $a_1, a_2, \ldots, a_8$ en el sentido de las manecillas del reloj y que

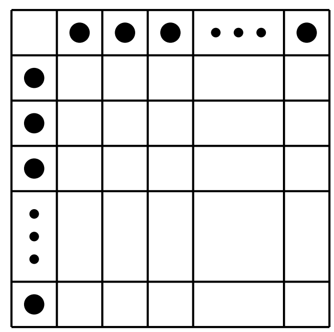
$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &\geq 14, \\ a_2 + a_3 + a_4 &\geq 14, \\ &\vdots \\ a_7 + a_8 + a_1 &\geq 14, \\ a_8 + a_1 + a_2 &\geq 14, \end{aligned}$$

al sumar las ocho desigualdades, obtenemos que

$$3(a_1 + a_2 + \cdots + a_8) \geq 8 \cdot 14 = 112.$$

Por otro lado, tenemos que $a_1 + a_2 + \cdots + a_8 = 1 + 2 + \cdots + 8 = 36$. Por lo tanto, $108 \geq 112$, lo que es una contradicción.

Solución del problema 11. Veamos que hay un conjunto preciso de $2n - 2$ torres de la siguiente manera:



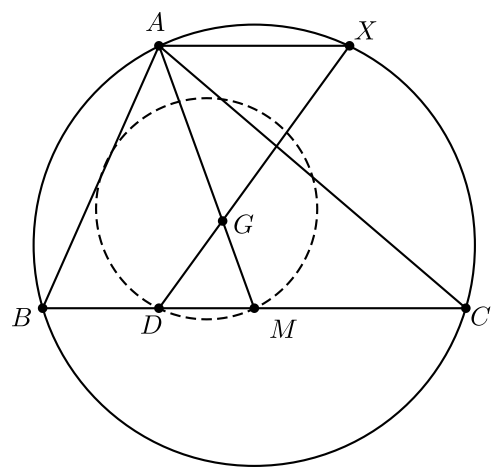
Demostremos que no es posible tener mas de $2n - 2$ torres en un conjunto preciso, en cuyo caso la respuesta sería $2n - 2$.

Supongamos que hay un conjunto preciso con al menos $2n - 1$ torres. Por ser preciso, cada torre puede asociarse a una fila o columna de manera que esa torre es la única en su respectiva fila o columna (es posible que a una torre se le asocie la fila y la columna en la que se encuentra). Luego, por el principio de las casillas hay al menos n torres que se asociaron a filas o que se asociaron a columnas. Sin pérdida de generalidad, supongamos que fue a las filas. Esto implica que en cada una de las n filas hay una torre única y, por lo tanto, hay n torres exactamente. Sin embargo, supusimos que había al menos $2n - 1$ torres, esto implica que $n - 1 = 0$, lo cual es absurdo pues $n > 1$. Luego, no es posible que exista un conjunto preciso con más de $2n - 2$ torres.

Solución del problema 12. Sea M el punto medio del lado BC. Es conocido que G es el centro de homotecia interno entre la circunferencia de los 9 puntos del triángulo ABC[6] y el circuncírculo del triángulo ABC[7]. Por lo tanto, el segmento DM se manda bajo la homotecia a AX, lo cual implica que son paralelos. Además, como la recta que contiene a DM es la misma que contiene a BC, se concluye el paralelismo buscado.

[6]Ver en el apéndice el teorema 20.

[7]Ver el ejemplo 3.1.8 de [3] en la sección de homotecia.



Solución del problema 13. Escribamos $m = 2^k p$, donde $p > 1$ es un entero impar. Entonces,

$$2017^m - 1 = 2017^{2^k p} - 1 = (2017^{2^k} - 1)(2017^{2^k(p-1)} + 2017^{2^k(p-2)} + \cdots + 2017^{2^k} + 1).$$

Dado que $2017^{2^k(p-1)} + 2017^{2^k(p-2)} + \cdots + 2017^{2^k} + 1$ es la suma de p números impares, entonces es un número impar. Así, la máxima potencia de 2 que divide a $2017^m - 1$ es la misma que la máxima potencia de 2 que divide a $2017^{2^k} - 1$. Como se busca que m sea mínimo, se concluye que $m = 2^k$. En este caso se tiene que $2017^{2^k} - 1 = (2017^{2^{k-1}} - 1)(2017^{2^{k-1}} + 1) = (2017^{2^{k-1}} + 1)(2017^{2^{k-2}} + 1) \cdots (2017 + 1)(2017 - 1)$. Dado que $2017^{2^n} + 1 \equiv 2 \pmod 4$ para cualquier entero positivo n, entonces 2^{k+5} divide a $2017^{2^k} - 1$ pero 2^{k+6} no lo divide (pues $2017 - 1 \equiv 32 \pmod{64}$ y $2017 + 1 \equiv 2 \pmod 4$). Por lo tanto, $k + 5 = 2017$, es decir, $k = 2012$. En conclusión, el número buscado es 2^{2012}.

Solución del problema 14. Sean $BC = a$, $CA = b$ y $AB = c$. Por potencia de un punto a una circunferencia se tiene que $BA \cdot BM = BP \cdot BQ$ y por Tales se sabe que $\frac{BM}{c} = \frac{BP}{a}$. Entonces, $BQ = \frac{c \cdot BM}{BP} = \frac{c^2}{a}$. Análogamente, $CP = \frac{b^2}{a}$. Así, $BP = \frac{a^2 - b^2}{a}$ y $CQ = \frac{a^2 - c^2}{a}$. Por tanto, la condición $\frac{BP}{CQ} = \frac{AB}{AC}$ significa que $b(a^2 - b^2) = c(a^2 - c^2)$, es decir, que $(b - c)(a^2 - b^2 - c^2 - bc) = 0$. Dado que $b \neq c$, se obtiene que $a^2 - b^2 - c^2 - bc = 0$, lo que implica, por la ley de cosenos, que $\cos \angle BAC = -\frac{1}{2}$. Por tanto, $\angle BAC = 120^\circ$.

Solución del problema 15. Sea

$$\frac{a(a-b) + b(b-c) + c(c-a)}{2} = d^2,$$

donde d es un entero. Se denotará por $x = a - b$, $y = b - c$ y $z = c - a$. Entonces, se tiene que

$$x + y + z = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4d^2. \tag{26}$$

Dado que todos los cuadrados son congruentes con 0 o 1 módulo 4, se sigue de (26) que los enteros x, y y z son pares. Sea $x_1 = \frac{x}{2}$, $y_1 = \frac{y}{2}$ y $z_1 = \frac{z}{2}$. Por tanto, las ecuaciones en (26) equivalen a $x_1 + y_1 + z_1 = 0$ y $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = d^2$. Estas ecuaciones implican que x_1, y_1, z_1 y d son enteros pares. Si se repite el mismo argumento, se llega por inducción a que 2^n divide a x, a y y a z, para todo entero positivo n. Esto último implica que $x = y = z = 0$, es decir, que $a = b = c$.

Solución del problema 16. Primero se demostrará que $n + 1$, $n + 2$ y $n + 3$ son potencias de números primos. Asumimos lo contrario, entonces alguno de ellos será de la forma ab, con $a \geq 2$, $b \geq 2$ y $\text{mcd}(a, b) = 1$. Dado que ab no divide a M, entonces a o b no divide a M. Sin pérdida de generalidad, se puede asumir que a no divide a M. Eso implica que $a \geq n + 1$, entonces $ab - a \leq 2$. Dado que $ab - a = a(b - 1) \leq 2$ con $a \geq 2$ y $b \geq 2$, se sigue que $a = b = 2$, una contradicción porque $\text{mcd}(a, b) = 1$.
Por tanto, $n+1$, $n+2$ y $n+3$ son potencias de números primos. Como al menos uno es par, entonces alguno de ellos es de la forma 2^x, con x un entero positivo. De la misma forma, al menos uno es divisible por 3, lo que implica que es de la forma 3^y, con y un entero positivo. Por paridad se concluye, sin pérdida de generalidad, que $2^x = 3^y + 1$ o $2^x = 3^y - 1$. Lo que divide el problema en dos casos.
Caso 1. Sea $2^x = 3^y + 1$. Dado que $2^x \equiv 1 \pmod 3$ si x es par y $2^x \equiv 2 \pmod 3$ si x es impar, entonces $x = 2z$, donde z es un entero no negativo. Así, $(2^z - 1)(2^z + 1) = 3^y$, es decir, que $2^z - 1$ y $2^z + 1$ son potencias de 3, lo cual solo sucede si $z = 1$. Por tanto, $3^y = 3$ y $2^x = 4$, esto implica que $n = 1$ o $n = 2$. Estas dos opciones funcionan con $M = 1$ y $M = 2$, respectivamente.
Caso 2. Sea $2^x = 3^y - 1$. Se puede asumir que $x \geq 2$ porque la solución con $x = 1$ ya se obtuvo en el caso anterior. Se sabe que $3^y \equiv 1 \pmod 4$ si y es par y que $3^y \equiv 3 \pmod 4$ si y es impar. Entonces, $y = 2z$, donde z es un entero no negativo y $(3^z - 1)(3^z + 1) = 2^x$. Por lo tanto, $3^z - 1$ y $3^z + 1$ son potencias de 2, lo cual solo es posible si $z = 1$. En conclusión, $3^y = 9$ y $2^x = 8$, es decir, que $n = 6$ o $n = 7$. La solución para $n = 6$ se obtiene con $M = 60$. Ahora, si $n = 7$, entonces $n + 3 = 10$, que no es una potencia de un número primo. Finalmente, las soluciones son $n = 1$, $n = 2$ y $n = 6$.

Solución del problema 17. Puesto que $a_{n-1} - (n - 1) = a_{n-1} + 1 - n$ es divisible por k, el primer número mayor que a_{n-1} con esa propiedad es $a_{n-1} + 1$, de esto se sigue que el n-ésimo número con esta propiedad es $a_{n-1} + 1 + k(n - 1)$. Por lo tanto, se debe cumplir recursivamente que

$$a_n = a_{n-1} + k(n - 1) + 1.$$

Si definimos $b_m = a_{m+1} - a_m$ para todo entero positivo m, con la recursión anterior obtenemos que

$$b_{m+1} - b_m = km + 1 - k(m - 1) - 1 = k.$$

Luego, b_k es una progresión aritmética y, por lo tanto, $b_m = b_1 + (m-1)k$. Como $b_1 = a_2 - a_1 = k + 2 - 1 = k + 1$, tenemos que $b_m = km + 1$, de donde

$$a_{m+1} - a_m = km + 1.$$

Entonces, $a_{m+1} = a_m + km + 1$. Iterando esta fórmula concluimos que

$$a_{m+1} = m + 1 + k\frac{m(m+1)}{2},$$

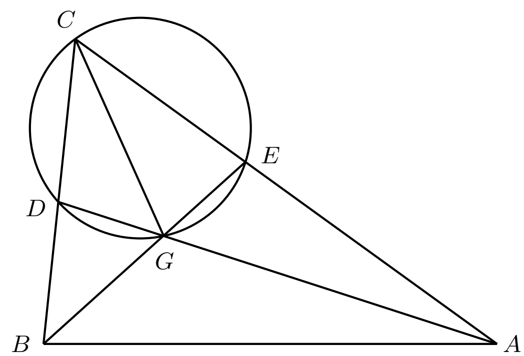
en particular, $a_{2017} = 2017 + 1008 \cdot 2017k$.

Solución del problema 18. Por cada tres enteros consecutivos exactamente uno es múltiplo de 3. Consideremos una lista de k enteros consecutivos. Si k es múltiplo de 3, digamos $k = 3\ell$, entonces la lista contiene exactamente ℓ múltiplos de 3: uno por cada grupo de tres números consecutivos. Si k no es múltiplo de 3, digamos $k = 3\ell + 1$ o $k = 3\ell + 2$, entonces la lista contiene al menos ℓ múltiplos de 3 ya que $k \geq 3\ell$. En cada caso, tenemos que $3\ell \geq k - 2$. Por lo tanto, la cantidad de múltiplos de 3 es al menos $\ell \geq \frac{k-2}{3}$.
Por otra parte, de cada cinco enteros consecutivos exactamente uno es múltiplo de 5. Consideremos una lista de k enteros consecutivos. Si k es múltiplo de 5, digamos $k = 5m$, entonces la lista contiene exactamente m múltiplos de 5. Si k no es múltiplo de 5, digamos $k = 5m - 1$, $k = 5m - 2$, $k = 5m - 3$ o $k = 5m - 4$, entonces la lista contiene a lo más m múltiplos de 5. En cada caso, tenemos que $5m \leq k + 4$. Por lo tanto, la cantidad de múltiplos de 5 es a lo más $m \leq \frac{k+4}{5}$.
Si una lista balanceada tiene longitud k, entonces lo anterior muestra que $\frac{k-2}{3} \leq \frac{k+4}{5}$, esto es, $5k - 10 \leq 3k + 12$. Luego, $2k \leq 22$, de donde, $k \leq 11$.
Por último, la lista $10, 11, 12, \ldots, 20$ tiene longitud 11 y es balanceada, pues contiene 3 múltiplos de tres y 3 múltiplos de cinco. Concluimos que $k = 11$ es la longitud máxima de una lista balanceada.

Solución del problema 19. Sean α la medida del ángulo en A y β la medida del ángulo en B. Como el ángulo en C mide 60°, tenemos que $\alpha + \beta = 180° - 60° = 120°$. Por lo tanto,

$$\angle DGE = \angle AGB = 180° - \angle BAD - \angle EBA = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 120°.$$

Luego, $\angle DGE + \angle DCE = 120° + 60° = 180°$, lo cual implica que el cuadrilátero $CDGE$ es cíclico.



Como G es la intersección de las bisectrices en A y en B, tenemos que CG es bisectriz del ángulo en C, esto es, $\angle DCG = \angle GCE = 30°$. Esto implica que los arcos $\widehat{DG}$ y $\widehat{GE}$ son iguales; por lo tanto, las cuerdas correspondientes DG y GE también lo son.

Solución del problema 20. Para cada entero positivo n consideremos n números primos $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tales que $n < p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ (esto es posible ya que hay una infinidad de números primos). Por el teorema chino del residuo, el sistema de congruencias

$$\begin{aligned} x &\equiv -1 \pmod{p_1}, \\ x &\equiv -2 \pmod{p_2}, \\ &\vdots \\ x &\equiv -n \pmod{p_n}, \end{aligned}$$

tiene una solución, digamos a. Entonces, los enteros consecutivos $a+1, a+2, \ldots, a+n$ son divisibles por $p_1, p_2, \ldots, p_n$, respectivamente. Para terminar, basta demostrar que el entero $a+i$, con $i = 1, 2, \ldots, n$, no es divisible por p_j si $j \neq i$. Supongamos que el entero $a+i$, $1 \leq i \leq n$, es divisible por algún p_j, con $1 \leq j \leq n$ y $j \neq i$. Como p_j divide a $a+j$, tenemos que p_j divide a la diferencia $a+i-(a+j) = i-j$. Luego, $p_j \leq |i-j|$. Esto es una contradicción, pues $n < p_j$ y $|i-j| < n$.

Problemas de Entrenamiento

Problemas de Entrenamiento.
Año 2017 No. 2.

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este número de tu revista. Te recordamos que las soluciones de los problemas en esta sección no las publicamos en este momento, por lo que te invitamos a que los resuelvas y nos envíes tus soluciones.

Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo. ¡Te invitamos a intentarlo!

Problema 1. Demuestra que para ninguna terna de números reales positivos a, b, c, la expresión

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$$

es un número entero.

Problema 2. En el reino de Marinola, los magos Deeds y Drini realizan una competencia mágica. En una puerta está escrito un número y el mago Deeds lanza un hechizo de manera que diariamente el número de la puerta cambia, aumentando en 112 al número que había el día anterior (por ejemplo, si hoy está el número 53, mañana estará el número 165).

El mago Drini tiene un contrahechizo que le permite, cuando le convenga, cambiar una vez al día el orden de los números de la puerta (si la puerta tiene 403, puede hacer que cambie a 340, 043, etc.). Si algún día el número de la puerta llega a ser mayor que 1000, el mago Deeds gana el torneo.
Si en la puerta está hoy el número 143, ¿puede el mago Drini evitar que el mago Deeds gane el torneo?

Problema 3. En el salón de Luis hay 25 niños (sin contarlo a él). Luis observa que no hay dos niños que tengan la misma cantidad de amigos en el salón. ¿Cuál es la mayor cantidad de amigos que puede tener Luis? (Nota: Si un niño A es amigo de un niño B, entonces B también es amigo de A).

Problema 4. Sea ABC un triángulo con circuncentro O y ortocentro H. Denotemos por P al punto medio de OH. Sean A', B' y C' las reflexiones de A, B y C sobre BC, CA y AB, respectivamente. Sean A'', B'' y C'' las proyecciones desde P sobre BC, CA y AB, respectivamente. Demuestra que los triángulos $A'B'C'$ y $A''B''C''$ son semejantes.

Problema 5. Sean a, b y c números reales positivos tales que $a+b+c=1$. Demuestra que

$$\frac{9}{10} \leq \frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} < 1.$$

Problema 6. Determina todas las soluciones en enteros x, y de la ecuación

$$x^3 + 10x - 1 = y^3 + 6y^2.$$

Problema 7. Un entero positivo n es *perfecto* si la suma de sus divisores positivos es $2n$. Por ejemplo, 6 es perfecto porque $2(6) = 1 + 2 + 3 + 6$.

a) Demuestra que si un entero perfecto mayor que 6 es divisible por 3, entonces también es divisible por 9.

b) Demuestra que si un entero perfecto mayor que 28 es divisible por 7, entonces también es divisible por 49.

Problema 8. Evariste Galois, Pescheux d'Hebinville y Ernest Duchâlet pelearán un duelo a muerte siguiendo las siguientes reglas. Primero decidirán al azar quién dispara primero, quién segundo y quién tercero. Luego tomarán sus lugares en las esquinas de un triángulo equilátero y por turnos, siguiendo el orden previamente elegido, cada uno eligirá un blanco y dispará una vez hasta que solo haya un sobreviviente. Es por todos conocido que Galois siempre atina a su blanco, mientras que d'Hebinville lo hace el $80\,\%$ de las veces y Duchâlet únicamente el $50\,\%$. Durante el duelo, cada uno seguirá la mejor estrategia para sí mismo (pudiendo disparar al aire) y nadie morirá de una bala perdida. ¿Qué probabilidad tiene Galois de sobrevivir el duelo?

Problema 9. Determina todos los valores posibles de la expresión

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2},$$

si a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo.

Problema 10. Demuestra que cualquier gráfica con 10 vértices y 26 aristas contiene al menos 4 triángulos.

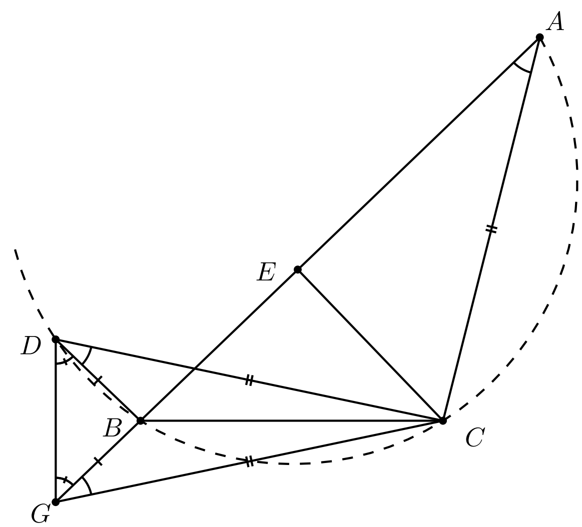
Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2016 No. 3.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 3, año 2016. En esta ocasión agradecemos a Olga Medrano Martín del Campo por habernos compartido sus soluciones a los problemas 7 y 8. Aprovechamos para invitar a todos los lectores a participar enviándonos sus soluciones para que puedan salir publicadas en los números posteriores de la revista. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 4, año 2016, por lo que aún tienes tiempo de enviarnos tus soluciones.

Problema 1. Sea ABC un triángulo tal que $\angle ACB > 90°$. Sea D un punto en el circuncírculo de ABC tal que $AC = CD$ y sea E el pie de la perpendicular a AB trazada desde C. Demuestra que $EB + BD = AE$.

Solución. Construyamos la reflexión G de A respecto de CE. Como $\angle AEC = 90°$, los puntos E, B y G son colineales. Ahora, el triángulo ACG es isósceles, de modo que $\angle CAE = \angle CGE$; además $\angle CDB = \angle CAB$ por subtender ambos el arco $\widehat{CB}$. Concluimos que $\angle CDB = \angle CGB$.

Las hipótesis del problema incluyen que $CD = AC$ y como $AC = CG$ por la reflexión, $CD = CG$ implica que el triángulo CDG es isósceles. Los ángulos iguales de su base son $\angle CDG = \angle CGD$ y restando a ambos $\angle CDB = \angle CGB$ obtenemos que $\angle BCG = \angle BGD$, de manera que el triángulo DBG es isósceles.



Finalmente, como $DB = BG$, se sigue que $EB + BD = EB + BG = EG$, que por construcción mide lo mismo que AE, como queríamos probar.

Problema 2. Sea $p(x) = x^2 + ax + b$, donde a es un número real y $b \neq 2$ es un número racional. Si $[p(0)]^2$, $[p(1)]^2$ y $[p(2)]^2$ son enteros, demuestra que a y b también lo son.

Solución. Dado que $b = p(0)$ y $[p(0)]^2$ es entero, tenemos que b^2 es entero. Como b es racional, tenemos que $b = \frac{m}{n}$ con m y n enteros y $n \neq 0$. Luego, $\frac{m^2}{n^2} = k$ para algún entero k, esto es, $n^2 \mid m^2$ y por lo tanto $n \mid m$. Luego, b es entero.
Ahora, $p(1) = 1 + a + b$, $p(2) = 4 + 2a + b$, por lo que, elevando al cuadrado:

$$[p(1)]^2 = 1 + a^2 + b^2 + 2a + 2ab + 2b = a^2 + a(2 + 2b) + (1 + 2b + b^2),$$
$$[p(2)]^2 = 16 + 4a^2 + b^2 + 16a + 4ab + 8b = 4a^2 + a(16 + 4b) + (16 + 8b + b^2).$$

Observemos que los últimos términos son trinomios cuadrados perfectos y, por tanto, son cuadrados de números enteros. Si calculamos $4[p(1)]^2 - [p(2)]^2$ también será un número entero, pero

$$\begin{aligned} 4[p(1)]^2 - [p(2)]^2 &= 4a(2 + 2b) + 4(1 + b)^2 - a(16 + 4b) - (4 + b)^2 \\ &= 8ab - 4ab + 8a - 16a + 4(1 + b)^2 - (4 + b)^2 \\ &= 4ab - 8a + 4(1 + b)^2 - (4 + b)^2, \end{aligned}$$

por lo que $4ab - 8a = 4a(b - 2)$ es entero, lo cual implica que a debe ser racional, pues b es entero y $b \neq 2$.
Finalmente, observamos del desarrollo de $[p(1)]^2$ que la ecuación

$$x^2 + x(2 + 2b) + ((1 + b)^2 - a^2 - a(2 + 2b) - (1 + b)^2) = 0$$

es una ecuación cuadrática cuyos coeficientes son todos enteros y además a es una raíz racional. Por otra parte, usando la fórmula para resolver una ecuación de segundo grado, obtenemos que las raíces de la ecuación anterior son $-1-b\pm|a+b+1|$. Como una de estas dos raíces es a, es fácil ver que a es un entero.

Problema 3. Si x, y, z son números reales positivos tales que $x^2+y^2+z^2 = 1+2xyz$, demuestra que $(1+x)(1+y)(1+z) \leq 4+4xyz$.

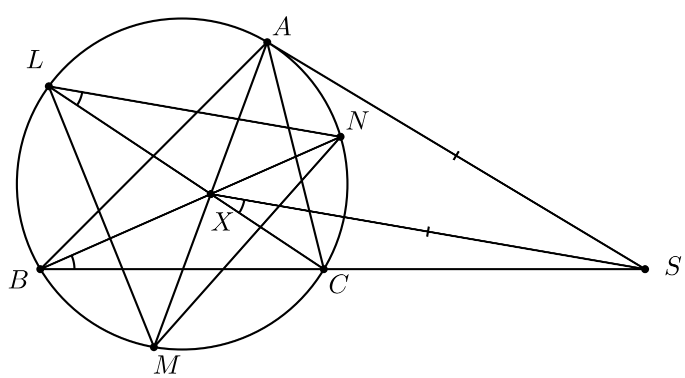
Solución. El lado derecho de la desigualdad es muy parecido al lado derecho de la igualdad en la hipótesis.
Observemos primero que $1+2xyz = x^2+y^2+z^2$ equivale a $2+2xyz = x^2+y^2+z^2+1$. Por tanto $1+xyz = \frac{x^2+y^2+z^2}{2} + \frac{1}{2}$. De ahí

$$\begin{aligned} 3+3xyz &= (x^2+y^2+z^2) + \frac{x^2+y^2+z^2}{2} + \frac{3}{2} \\ &= (x^2+y^2+z^2) + \frac{x^2+1}{2} + \frac{y^2+1}{2} + \frac{z^2+1}{2}. \end{aligned}$$

La desigualdad de la media aritmética-media geométrica implica $\frac{x^2+1}{2} \geq \sqrt{x^2 \cdot 1} = x$, de modo que $3+3xyz \geq x^2+y^2+z^2+x+y+z$. Para obtener el desarrollo de $(1+x)(1+y)(1+z)$ solo nos falta sumar $1+xyz$ de ambos lados, con lo cual se concluye la prueba.

Problema 4. Sean A, B y C puntos sobre una circunferencia Ω. Sea S la intersección de la tangente por A a Ω con la recta BC. Se toma un punto X tal que $SA = SX$. Las rectas AX, BX y CX vuelven a intersecar a Ω en M, N y L, respectivamente. Demuestra que $MN = ML$.

Solución. Por potencia de un punto y del hecho de que $SA = SX$ tenemos que $SX^2 = SA^2 = SB \cdot SC$. Entonces, los triángulos SXC y SBX son semejantes, de donde $\angle CXS = \angle CBX$. Además, $\angle CBX = \angle CBN = \angle CLN$ por el cíclico $BCNL$. Luego, $\angle CXS = \angle CLN$ de donde LN y SX son paralelas. Además, como $SX = SA$ se tiene que $\angle SXA = \angle XAS$.



Por otro lado, por ángulos semi-inscritos, se tiene que

$$\angle XAS = \angle MAS = \angle MLA = \angle NLA + \angle MLN. \tag{27}$$

Adicionalmente, usando las paralelas, un águlo externo en MXN y ángulos inscritos se tiene que

$$\begin{aligned}\angle SXA &= \angle SXN + \angle NXA = \angle LNB + \angle XNM + \angle NMX \\ &= \angle LNM + \angle NLA.\end{aligned} \tag{28}$$

Igualando (27) y (28), obtenemos que $\angle MLN = \angle LNM$, lo cual implica que $MN = ML$.

Problema 5. Determina todas las parejas (x, y) de números reales que satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}x^3 + 1 - xy^2 - y^2 &= 0,\\ y^3 + 1 - x^2y - x^2 &= 0.\end{aligned}$$

Solución. Restando las dos ecuaciones del sistema dado, obtenemos que

$$(x^3 - y^3) + xy(x - y) + x^2 - y^2 = 0,$$

o de manera equivalente,

$$(x - y)(x + y)(x + y + 1) = 0.$$

Luego, $y = x$ o $y = -x$ o $y = -x - 1$.
Si $y = x$, entonces $x = \pm 1$, y por lo tanto $(x, y) = (1, 1)$ o $(x, y) = (-1, -1)$.
Si $y = -x$, entonces nuevamente $x = \pm 1$, y por lo tanto $(x, y) = (1, -1)$ o $(x, y) = (-1, 1)$.
Si $y = -x - 1$, sustituyendo en la primera ecuación del sistema dado, obtenemos que

$$x^3 + 1 - x(x + 1)^2 - (x + 1)^2 = -3x(x + 1) = 0.$$

Por lo tanto, $x = 0$ o $x = -1$, lo cual implica que $(x, y) = (0, -1)$ o $(x, y) = (-1, 0)$.

Problema 6. Determina todas las ternas de enteros no negativos (x, y, n) tales que

$$\frac{x! + y!}{n!} = 3^n,$$

con la convención de que $0! = 1$.

Solución. Sea S el conjunto de todas las ternas ordenadas (x, y, n) de enteros no negativos tales que $\frac{x!+y!}{n} = 3^n$, o de manera equivalente $x! + y! = 3^n n!$. Si $n = 0$, es fácil ver que no existe terna $(x, y, n) \in S$. Si $n = 1$, sea $(x, y, n) \in S$; entonces si $x \geq 3$ o $y \geq 3$, tenemos que $x! + y! \geq 7 > 3 = 3^1 \cdot 1!$. Luego, $x < 3$, $y < 3$ y es fácil verificar que $\{(0,2,1),(1,2,1),(2,0,1),(2,1,1)\} \subset S$.

Lema. Sea $(x,y,n) \in S$ con $n \geq 2$. Entonces, $x \geq n$, $y \geq n$ y $x > n$ o $y > n$.
Demostración. Si $x \leq n$ e $y \leq n$, entonces $x! + y! \leq 2n! < 3^n n!$, de modo que $x > n$ o $y > n$. Si $x > n$ e $y < n$, entonces $\frac{x!+y!}{n!} = \frac{x!}{n!} + \frac{y!}{n!} = 3^n$, lo que es una contradicción ya que $\frac{x!}{n!}$ es un entero pero $\frac{y!}{n!}$ no lo es. Luego, si $x > n$, entonces $y \geq n$. De manera análoga, en el caso $y > n$ tenemos que $x \geq n$ por simetría. □

Demostraremos que para $n \geq 2$ no existe $(x,y,n) \in S$ considerando casos sobre n módulo 3.

Caso 1. $n \equiv 0 \pmod 3$. Sea $(x,y,n) \in S$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x \leq y$. Por el lema, $n \leq x \leq y$ y una de estas dos desigualdades es estricta. Si $x > n$, entonces de $\frac{x!+y!}{n!} = 3^n$ se sigue que $(n+1) \mid 3^n$. Sin embargo, $n+1$ tiene un divisor primo distinto de 3, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $n = x < y$, y en consecuencia

$$\frac{x!+y!}{n!} = \frac{x!}{n!} + \frac{y!}{n!} = 1 + (n+1)(n+2)\cdots y = 3^n.$$

De aquí que 3 divide a $1 + (n+1)(n+2)\cdots y$ y $(n+1)(n+2)\cdots y \equiv 2 \pmod 3$, lo cual implica que $y = n+2$. Sin embargo, $1 + (n+1)(n+2) < 3^n$ para $n \geq 3$ (por inducción) y $1 + (2+1)(2+2) \neq 3^2$, lo que contradice el hecho de que $(x,y,n) \in S$.

Caso 2. $n \equiv 1 \pmod 3$. Sea $(x,y,n) \in S$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x \leq y$. De manera similar al Caso 1, se sigue que $x = n$ e $y = n+1$. Sin embargo, $1 + (n+1) < 3^n$ para cada entero $n \geq 2$, lo que contradice el hecho de que $(x,y,n) \in S$.

Caso 3. $n \equiv 2 \pmod 3$. Sea $(x,y,n) \in S$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x \leq y$. Por el lema, $n \leq x \leq y$ y una de estas dos desigualdades es estricta. Si $x \geq n+2$, entonces de $\frac{x!+y!}{n!} = 3^n$ se sigue que $(n+2) \mid 3^n$. Sin embargo, $n+2$ tiene un divisor primo distinto de 3, lo que es una contradicción. Luego, $n \leq x < n+2$.

- Si $x = n$, entonces $n = x < y$ y

  $$\frac{x!+y!}{n!} = \frac{x!}{n!} + \frac{y!}{n!} = 1 + (n+1)(n+2)\cdots y = 3^n,$$

  lo que contradice que $n+1 \equiv 0 \pmod 3$.

- Si $x = n+1$, entonces

  $$\frac{x!+y!}{n!} = \frac{x!}{n!} + \frac{y!}{n!} = (n+1) + (n+1)(n+2)\cdots y = 3^n.$$

  Si además $y = n+1$, entonces

  $$2(n+1) = (n+1) + (n+1)(n+2)\cdots y = 3^n$$

es par, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $y > n+1$ y

$$(n+1)(1+(n+2)\cdots y) = 3^n.$$

Se sigue que $1+(n+2)\cdots y \equiv 0 \pmod 3$ y $(n+2)\cdots y \equiv 2 \pmod 3$, lo cual implica que $y = n+3$. Sin embargo, $(n+1)(1+(n+2)(n+3)) \neq 3^n$ para $1 \leq n \leq 5$ y por inducción $(n+1)(1+(n+2)(n+3)) < 3^n$ si $n \geq 6$, contradiciendo el hecho de que $(x, y, n) \in S$.

Problema 7. Sean a, b y c números reales positivos tales que $27 + abc = (a+b+c)(ab+bc+ca)$. Demuestra que

$$\frac{a^2}{a+2b} + \frac{b^2}{b+2c} + \frac{c^2}{c+2a} \geq \frac{3}{2}.$$

Solución. (Solución de Olga Medrano Martín del Campo). Primero, utilizando la desigualdad útil, vemos que:

$$\frac{a^2}{a+2b} + \frac{b^2}{b+2c} + \frac{c^2}{c+2a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{3}.$$

Ahora, consideremos la siguiente identidad:

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) = (a+b)(b+c)(a+c) + abc.$$

Por hipótesis, tenemos que $(a+b)(b+c)(c+a) = 27$. Entonces, por la desigualdad MA-MG, tenemos que

$$\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3} \geq \sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Por lo tanto, $\frac{2(a+b+c)}{3} \geq 3$, de donde se sigue el resultado.

Problema 8. Kevin escribió tres números enteros positivos en su cuaderno: a, b, y c. Estos números cumplen lo siguiente:

- $b = a + p$, donde p es un divisor primo de a,
- $c = b + q$, donde q es un divisor primo de b,
- $p \neq q$.

Kevin se da cuenta que $abc = 2016k$, con $1 \leq k \leq 6$. Encuentra el valor de k.

Solución. (Solución de Olga Medrano Martín del Campo). Veamos primero que como p divide a a, este factor primo va a aparecer dos veces al menos en el producto abc. Pero nótese que $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, y que como k es un número del 1 al 6, solo va a poder aportar factores 2 o 3, o a lo más un factor primo 5. Por lo tanto, los únicos valores que puede tomar p son 2 o 3. Análogamente pasa con q, tomando en cuenta que q divide a b y a c. Pero como una de las condiciones es que $p \neq q$, entonces uno de los dos tiene que ser 2 y el otro 3. Tenemos por tanto dos casos:

- Si $p = 2$ y $q = 3$, entonces vamos a tener que la siguiente ecuación es cierta:

$$a(a + 2)(a + 5) = 2016k.$$

  Ahora, si a fuera impar, $a + 2$ también, y el único número par sería $a + 5$. Sin embargo, como $2016k$ tiene al menos 5 factores 2, entonces $a+5$ tiene al menos cinco factores 2, por lo que $a + 5 \geq 32$, $a + 2 \geq 29$, $a \geq 27$. Entonces, la multiplicación de estos tres valores nos daría mayor o igual que $32 \cdot 29 \cdot 27 = 29 \cdot (32 \cdot 27) = 29 \cdot (216 \cdot 4) = 29 \cdot (864) \geq 29 \cdot (841) \geq 29 \cdot 29^2 = 29^3 = 30^3 - 3 \cdot 30^2 + 3 \cdot 30 - 1 = 24389 \geq 2016 \cdot 6 = 12096$, contradicción.
  Pero si a fuera par, entonces $a + 2$ también y $a + 5$ no. Entonces, entre $a + 2$ y a deben juntar al menos 5 factores 2. Y como son dos pares consecutivos, uno de ellos va a ser de la forma $4l + 2$, por lo que solo tendrá un factor 2, y el otro tendrá que tener al menos 4 factores 2. Tenemos varios subcasos:

  - Si $a = 16$, entonces $a(a+2)(a+5) = 16 \cdot 18 \cdot 21 = 2^4 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 7 = 2016 \cdot 3$, por lo que $k = 3$ es un valor posible.
  - Si $a + 2 = 16$, entonces $a(a + 2)(a + 5) = 14 \cdot 16 \cdot 19 \neq 2016 \cdot k$, porque 19 no puede estar como factor primo de ese producto.
  - Si a o $a + 2$ es un múltiplo de 16 mayor o igual que 32, entonces $a + 2 \geq 32, \Rightarrow a(a + 2)(a + 5) \geq 30 \cdot 32 \cdot 35 \geq 30^3 = 27000 > 2016k$.

- Si $p = 3$ y $q = 2$, entonces queremos que sea cierto que $a(a+3)(a+5) = 2016k$. De nuevo, si a fuera par, entonces sería el único que aporta factores 2, por lo que tendría que tener al menos cinco de estos factores, entonces sería mayor o igual que 32 y $abc > 32^3 > 29^3 > 2016k$, una contradicción. Por lo tanto, a debe ser impar si se busca una solución, entonces $a + 3$ y $a + 5$ tienen entre los dos al menos cinco factores 2. No obstante, usando que uno de ellos es de la forma $4k + 2$ y tiene solo un factor 2, el otro tiene que ser múltiplo de 16, de donde salen los siguientes casos:

  - Si $a+3 = 16$, entonces $a(a+3)(a+5) = (13)(16)(18) \neq 2016k$, porque $2016k$ no puede tener un factor 13 en este problema.
  - Si $a + 5 = 16$, entonces $a(a + 3)(a + 5) = (11)(14)(16) \neq 2016k$, de nuevo porque hallamos un factor 11 en el producto, que no debe estar.
  - Si $a + 3$ o $a + 5$ es un múltiplo de 16 que es mayor o igual a 32, entonces, $abc \geq (27)(30)(32) = 30 \cdot 216 \cdot 4 > 29^3 > 2016k$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto, la única solución es $k = 3$.

Problema 9. En un callejón viven 2016 gatos. Quieren salir a cantar durante algunas noches bajo las siguientes reglas:

- Cada noche saldrá a cantar un conjunto de 6 gatos.

- Para cualesquiera dos noches distintas, los conjuntos de gatos que salen en esas dos noches o bien tienen 0 gatos en común, o bien tienen 5 gatos en común.

¿Cuál es el máximo número de noches que los gatos pueden salir a cantar?

Solución. El máximo es 2016. Para el ejemplo, agrupamos a los 2016 elementos en 288 clases de 7 elementos. De cada clase elegimos sus 7 subconjuntos de 6 elementos. Así, cada par de 6-conjuntos se interseca en 0 o en 5 elementos. Para ver que 2016 es el máximo, veremos que cualquier otra opción tiene igual o menos noches. Supongamos que de alguna manera, los gatos se organizaron y cantaron m noches distintas. Sea $\mathcal{F}$ la familia de todos los subconjuntos de gatos que salieron a cantar. Evidentemente $|\mathcal{F}| = m$. Diremos que dos subconjuntos de $\mathcal{F}$ están relacionados si tienen gatos en común. Es fácil probar que esta relación es de equivalencia[8] y, por lo tanto, $\mathcal{F}$ se descompone en clases de equivalencia, digamos $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_k$. Para cada $i = 1, \dots, k$ definamos

$$n_i := \left| \bigcup_{G \in \mathcal{F}_i} G \right|.$$

Como la relación es de equivalencia, inferimos que $2016 \geq \sum_{i=1}^{k} n_i$. Por otro lado, dada una clase de equivalencia $\mathcal{F}_i$, solo puede pasar una de las siguientes dos opciones:

1. No hay tres subconjuntos de gatos que tengan cinco elementos en común. En este caso $n_i = 6$ (y por lo tanto $|\mathcal{F}_i| = 1 \leq n_i$) o $n_i = 7$ (y por lo tanto $|\mathcal{F}_i| \leq 7 = n_i$). Lo anterior se debe al siguiente hecho, si los conjuntos $G_1 = \{a, b, c, d, e, f\}$ y $G_2 = \{a, b, c, d, e, g\}$ pertenecen a $\mathcal{F}_i$, entonces cualquier otro subconjunto G_3 debe tener cinco elementos de G_1 y cinco elementos de G_2. Como no hay tres conjuntos con cinco gatos en común, concluimos que $G_3 \subset \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

2. Hay tres subconjuntos de gatos con cinco elementos en común. Si esto sucede cualquier otro miembro de $\mathcal{F}_i$ debe tener a los mismos 5 gatos en común. En efecto, si $G_1 = \{a, b, c, d, e, f\}$, $G_2 = \{a, b, c, d, e, g\}$ y $G_3 = \{a, b, c, d, e, h\}$ son elementos de $\mathcal{F}_i$ y hubiera un cuarto subconjunto G_4 que no contenga al conjunto $\{a, b, c, d, e\}$, entonces podríamos suponer (sin perder generalidad) que es de la forma $G_4 = \{a, b, c, d, f, x\}$ (ya que la intersección con G_1 debe tener cinco elementos). Como la intersección con G_2 también debe tener cinco elementos y f no es elemento de G_2, concluimos que $x = g$. Pero en este caso la intersección de G_4 y G_3 tendría cardinalidad 4, lo cual es imposible.

   Del argumento anterior concluimos que $|\mathcal{F}_i| = n_i - 5$.

En cualquier caso $|\mathcal{F}_i| \leq n_i$ y por lo tanto

$$m = |\mathcal{F}| = \sum_{i=1}^{k} |\mathcal{F}_i| \leq \sum_{i=1}^{k} n_i \leq 2016.$$

[8]Una relación en un conjunto A es de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Problema 10. Para una pareja (a, b) de números reales positivos, construimos recursivamente las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ como sigue. Definimos $x_0 = y_0 = 1$, $x_1 = a$, $y_1 = b$ y para $n \geq 1$:

$$x_{n+1} = \left(\frac{y_{n-1}}{x_{n-1}}\right)^n \cdot x_n, \qquad y_{n+1} = \left(\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}\right)^n \cdot y_n.$$

Determina todas las parejas (a, b) para las cuales todos los números de las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son enteros.

Solución. Vamos a introducir una sucesión auxiliar $\{z_n\}$ que definimos recursivamente como $z_1 = z_2 = 1$ y para $n \geq 1$, se define $z_{n+1} = n(1 - 2z_{n-1}) + z_n$.
Las siguientes dos igualdades se pueden probar (conjuntamente) para $n \geq 1$ mediante un argumento inductivo estándar:

$$x_n = a^{z_n} b^{1-z_n} = b\left(\frac{a}{b}\right)^{z_n} \qquad y_n = a^{1-z_n} b^{z_n} = a\left(\frac{b}{a}\right)^{z_n}.$$

Si la pareja es de la forma (a, a) con a entero entonces por las expresiones anteriores tenemos que $x_n = y_n = a$ para toda n, de modo que estas parejas funcionan. Veamos que son las únicas.
Primero, notemos que en particular a y b tienen que ser enteros pues son respectivamente x_1 y y_1. Para demostrar que $a = b$, vamos a estudiar más a detalle la sucesión $\{z_n\}$. Nos interesan las siguientes propiedades:

- $\{z_n\}$ es una sucesión de enteros. Esto se sigue inductivamente de que z_1 y z_2 lo son, y de la recursión.

- La imagen de $\{z_n\}$ no es finita. Para ver esto procedamos por contradicción. Supongamos que la sucesión toma solo una cantidad finita de valores. De esta forma, hay una cantidad finita de ternas de la forma (z_{i-1}, z_i, z_{i+1}), y por lo tanto existen índices $i \neq j$ para los cuales estas ternas coinciden. Sin embargo, usando la recursión tendríamos:

  $$i(1 - 2z_{i-1}) = z_{i+1} - z_i = z_{j+1} - z_j = j(1 - 2z_{j-1}) = j(1 - 2z_{i-1}),$$

  lo cual implica que $(i - j)(1 - 2a_{i-1}) = 0$. Pero esto es imposible pues $i \neq j$ y $1 - 2a_{i-1}$ no es cero pues es un entero impar.

- En la sucesión $\{|z_n|\}$ hay valores arbitrariamente grandes. De no haberlos, la imagen de $\{z_n\}$ sería acotada, y en particular finita. Esto contradice el punto anterior.

Ahora sí, regresemos a la solución del problema original. Supongamos que $a < b$ (el otro caso es análogo). Por lo que estudiamos arriba, la sucesión $\{z_n\}$ tiene o bien valores positivos arbitrariamente grandes, o bien valores negativos arbitrariamente grandes. Todavía no sabemos cuál, pero no importa, esto es suficiente para terminar el problema.

- Si $\{z_n\}$ tiene valores positivos arbitrariamente grandes, entonces tomemos n de modo que $b\left(\frac{a}{b}\right)^{z_n} < 1$. De esta forma, x_n está entre 0 y 1 y, por lo tanto, no es entero.

- Si $\{z_n\}$ tiene valores negativos arbitrariamente grandes, entonces tomemos n de modo que $a\left(\frac{b}{a}\right)^{z_n} < 1$. De esta forma, y_n está entre 0 y 1 y, por lo tanto, no es entero.

En cualquiera de los dos casos, hemos mostrado que alguna de las sucesiones tiene valores entre 0 y 1 y, por lo tanto, no pueden consistir únicamente de enteros. De esta forma, las únicas soluciones posibles son de la forma (a, a) con a un entero.

Concursos Estatales

XXXI Olimpiada de Matemáticas en Baja California

La Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Baja California (OMMBC) consta de dos niveles. En el nivel uno participan los alumnos que cursan secundaria y en el nivel dos participan chicos que cursan preparatoria.

Los exámenes se aplican en 4 etapas: La primera etapa se lleva a cabo en noviembre/diciembre, consiste de un examen de opción múltiple y este se le envía a las preparatorias del estado, junto con las respuestas, para que se los apliquen a sus alumnos, los califiquen y envíen de regreso un listado de los participantes con las calificaciones de cada alumno. En esta primera etapa participan alrededor de 3000 alumnos, provenientes de unas 60 preparatorias. En esta etapa no se invitan secundarias, sin embargo, algunas preparatorias que también tienen secundaria, les aplican el mismo examen a sus alumnos y clasifican algunos de ellos a la segunda etapa. En esta primera etapa se seleccionan alrededor de 350 estudiantes.

La segunda etapa se lleva a cabo a finales del mes de febrero. Esta etapa se realiza en tres sedes: Mexicali, Rosario y Ensenada. Los participantes son divididos, dependiendo qué sede les quede más cerca. El examen ya no es de opción múltiple y cada problema tiene un valor de 4 puntos. En esta etapa se seleccionan alrededor de 70 alumnos.

La tercera etapa se lleva a cabo en la primera o segunda semana de junio. En esta etapa se invitan a unos 100 chicos de secundaria que hayan destacado en otros concursos a nivel secundaria, principalmente en el concurso de primavera y la ONMAS. Esta etapa se hacía solo en Ensenada, y se calificaba el mismo día, pero este año se llevó a cabo en tres sedes, como la segunda etapa y los exámenes se calificaron después. De esta etapa clasifican alrededor de 35 chicos, de los cuales al menos una tercera parte es de nivel uno y el resto de nivel dos.

La cuarta y última etapa se hace en la primera semana de septiembre. Se aplican dos exámenes en dos días consecutivos (como en el concurso nacional) y el segundo día en la tarde se dan los resultados de esta etapa, esto es, se anuncian quienes son los 6 chicos que representarán a Baja California en el concurso nacional de la OMM. De estos seleccionados al menos uno debe ser de nivel uno. En algunas ocasiones, la mitad de la delegación ha sido de nivel uno.

Entre la segunda y la tercera etapa, se dan entrenamientos para todos los chicos que están clasificados. Estos entrenamientos se hacen por sedes (Ensenada, Mexicali y Tijuana), no son obligatorios y se invitan a todos los participantes, aunque no estén clasificados. Se coordinan las tres sedes para impartir los mismos materiales cada fin de semana.

De la misma forma se dan entrenamientos durante el verano, para los chicos que clasificaron a la cuarta etapa, en las mismas tres sedes y al igual que antes, también asisten algunos chicos que no clasificaron pero que aún pueden participar el año siguiente.

A continuación presentamos los problemas de la segunda y la tercera etapa en el nivel uno, así como de la tercera etapa en el nivel dos, de la 31^a OMMBC.

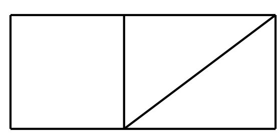
Segunda etapa, nivel uno

Problema 1. El papá de Fernando y Argel compró 4 paletas, 3 chiclosos y 3 caramelos. Si quiere repartirlos entre sus hijos de manera que cada uno reciba 5 dulces, ¿de cuántas formas puede hacerlo?

Problema 2. ¿Qué número se encuentra en la posición 2017 en la siguiente serie numérica?

$$1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5...$$

Problema 3. Dentro de un rectángulo se traza una línea vertical que forma un cuadrado y un rectángulo más pequeño, de manera que el área del rectángulo grande es 2.5 veces la del cuadrado. Si el área del cuadrado es 36 cm^2, determina la diagonal del rectángulo pequeño.

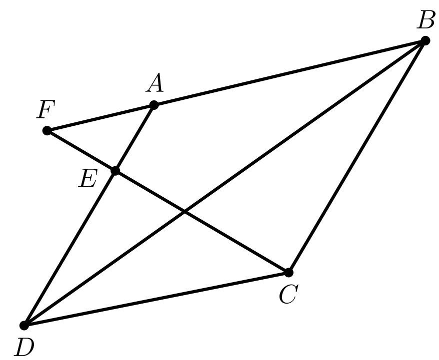


Problema 4. ¿Cuántos números menores a 1000 existen tales que son iguales a 3 veces la suma de sus dígitos?

Problema 5. Sea $ABCD$ un cuadrado y E y F puntos fuera del cuadrado tales que los triángulos AEB y BFC son equiláteros. Encuentra el valor del ángulo $\angle EFD$.

Tercera etapa, nivel uno

Problema 1. Sea $ABCD$ un cuadrilátero tal que la diagonal BD divide el ángulo $\angle ADC$ en dos partes iguales. Sea E la intersección de la línea perpendicular desde C hacia AD y F la intersección de AB con EC. Si $\angle ADB = 30°$, AD es paralela a BC y $\angle ABD = 15°$, demuestra que C es el centro de la circunferencia que pasa por B, F y D.



Problema 2. Se tienen dos líneas con 2018 puntos marcados en cada una de ellas, de forma que uno de estos es el punto de intersección de las rectas. ¿Cuántos triángulos con vértices en esos puntos marcados se pueden hacer?

Problema 3. Con losetas cuadradas (el lado tiene un número exacto de unidades) se ha podido cubrir el piso de una habitación de superficie 18144 unidades cuadradas de la siguiente manera: el primer día se puso una loseta, el segundo día dos losetas, el tercero tres, etc. ¿Cuántas losetas fueron necesarias?

Tercera etapa, nivel dos

Problema 1. Se tienen dos líneas con 2018 puntos marcados en cada una de ellas, de forma que uno de estos es el punto de intersección de las rectas. ¿Cuántos triángulos con vértices en esos puntos marcados se pueden hacer?

Problema 2. Con losetas cuadradas (el lado tiene un número exacto de unidades) se ha podido cubrir el piso de una habitación de superficie 18144 unidades cuadradas de la siguiente manera: el primer día se puso una loseta, el segundo día dos losetas, el tercero tres, etc. ¿Cuántas losetas fueron necesarias?

Problema 3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico con $BC < AD$, M el punto medio de AD y Q la intersección de AB con CD. Si BM es paralela a CD y $\frac{AD}{BC} = 2\sqrt{2}$, encuentra $\frac{DC}{CQ}$.

Problemas de Olimpiadas Internacionales

9ª Romanian Master of Mathematics

Del 22 al 27 de febrero de 2017 se llevó a cabo en la ciudad de Bucarest, Rumania, la 9^a Romanian Master of Mathematics, una competencia de matemáticas a la que solo se invita a un selecto grupo de países de entre los más destacados en Matemáticas en el mundo. En esta ocasión participaron 111 estudiantes provenientes de 19 países.

La delegación mexicana estuvo integrada por Víctor Hugo Almendra Hernández (Ciudad de México), Alfredo Alef Pineda Reyes (Estado de México), Leonardo Ariel García Morán (Jalisco) y Oriol Solé Pi (Ciudad de México). Los profesores que acompañaron a la delegación fueron Luis Eduardo García Hernández (líder) y Leonardo Ignacio Martínez Sandoval (colíder). Esta fue la tercera participación de México en esta competencia. Nuestros estudiantes fueron premiados con una medalla de bronce para Leonardo Ariel, mientras que Oriol, Alfredo y Víctor obtuvieron una mención honorífica por haber resuelto completamente un problema pero no haber obtenido puntaje suficiente para una medalla.

Los estudiantes presentaron dos pruebas, contando cada una con 3 problemas para resolver en un máximo de cuatro horas y media. Cada problema fue calificado con un número del 0 al 7, para un máximo de 42 puntos.

En esta competencia existe una clasificación oficial por equipos que toma en cuenta solo los tres puntajes más altos de cada equipo. En esta ocasión, México quedó ubicado en la 15^a posición. El equipo coreano obtuvo el primer lugar de acuerdo a dicha clasificación, con Reino Unido en segunda posición y China en la tercera.

A continuación presentamos los problemas de la 9^a Romanian Master of Mathematics. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. (a) Demostrar que cada entero positivo n puede ser escrito de forma única como

$$n = \sum_{j=1}^{2k+1} (-1)^{j-1} 2^{m_j},$$

donde $k \geq 0$ y $0 \leq m_1 < m_2 < \cdots < m_{2k+1}$ son enteros.
Este número k es llamado el *peso* de n.

(b) Encontrar (de forma cerrada) la diferencia entre el número de enteros positivos menores o iguales a 2^{2017} con peso par y el número de enteros positivos menores o iguales a 2^{2017} con peso impar.

Problema 2. Determinar todos los enteros positivos n que satisfacen la siguiente condición: para cada polinomio mónico P de coeficientes enteros y grado menor o igual a n, existen un entero positivo $k \leq n$ y $k+1$ enteros distintos $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$ tales que

$$P(x_1) + P(x_2) + \cdots + P(x_k) = P(x_{k+1}).$$

Nota. Un polinomio es *mónico* si el coeficiente de la mayor potencia es 1.

Problema 3. Sean n un entero mayor que 1 y X un conjunto de n elementos. Una colección no vacía de subconjuntos $A_1, \ldots, A_k$ de X es *estrecha* si la unión $A_1 \cup \ldots \cup A_k$ es un subconjunto propio de X y ningún elemento de X está en exactamente uno de los A_i's. Encontrar la mayor cantidad de subconjuntos propios no vacíos de X que puede haber en una colección, de manera que ninguna subcolección no vacía de ella sea estrecha.
Nota. Un subconjunto A de X es *propio* si $A \neq X$. Se asume que los conjuntos en una colección son distintos. La misma colección también es considerada una subcolección.

Problema 4. En el plano cartesiano, sean $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ las gráficas de las funciones cuadráticas $f_1(x) = p_1x^2 + q_1x + r_1$ y $f_2(x) = p_2x^2 + q_2x + r_2$, donde $p_1 > 0 > p_2$. Las gráficas $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ se intersecan en los puntos distintos A y B. Las cuatro rectas tangentes a $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ en A y B forman un cuadrilátero convexo que tiene circunferencia inscrita. Demostrar que las gráficas $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ tienen el mismo eje de simetría.

Problema 5. Sea $n \geq 2$ un entero fijo. Una *coladera de* $n \times n$ es un tablero de $n \times n$ con n casillas eliminadas, de modo que en cada fila y en cada columna hay exactamente una casilla eliminada. Una *tira* es un tablero de $1 \times k$ o $k \times 1$ para cualquier entero positivo k (k puede variar). Para cada coladera A, sea $m(A)$ el mínimo número de tiras en las que se puede partir A. Encontrar todos los posibles valores de $m(A)$ conforme A varía sobre todas las posibles coladeras de $n \times n$.

Problema 6. Sean $ABCD$ un cuadrilátero convexo y P, Q, R y S puntos sobre los segmentos AB, BC, CD y DA, respectivamente. Se cumple que los segmentos PR y QS dividen a $ABCD$ en cuatro cuadriláteros, cada uno de los cuales tiene diagonales perpendiculares. Demostrar que los puntos P, Q, R y S son concíclicos.

XXIX Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico

Desde 1990, México ha participado en la Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico (APMO, por sus siglas en inglés). Este concurso, a diferencia de las demás olimpiadas internacionales en las que México participa, es bajo la modalidad por correspondencia.

Durante el mes de marzo de 2017 se aplicó el examen de la XXIX Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico a los alumnos preseleccionados para las competencias internacionales y se enviaron los resultados de los diez mejores exámenes al comité organizador de dicho concurso, para su revisión. En esta ocasión, el país organizador es México.

En esta competencia, México obtuvo un total de 7 medallas distribuidas de la siguiente manera: 1 de oro, 2 de plata y 4 de bronce. Además, se obtuvieron 3 menciones honoríficas. En total, México obtuvo 149 puntos quedando en el lugar número 17 de 39 países participantes.

A continuación hacemos mención de los 10 alumnos que nos representaron en esta competencia y sus resultados.

- Leonardo Ariel García Morán (Jalisco): Medalla de oro.
- Isaac Jair Jiménez Uribe (Sinaloa) : Medalla de plata.
- Oriol Solé Pi (Ciudad de México): Medalla de plata.
- Alfredo Alef Pineda Reyes (Estado de México): Medalla de bronce.
- Fernando Isaí Sáenz Meza (Tlaxcala): Medalla de bronce.
- Juan Eduardo Castanedo Hernández (Zacatecas): Medalla de bronce.
- Víctor Antonio Domínguez Silva (Nuevo León): Medalla de bronce.
- Jonatan Alejandro González Cázares (Jalisco): Mención honorífica.
- Ana Paula Jiménez Díaz (Ciudad de México): Mención honorífica.
- Axel Barba Razo (Baja California): Mención honorífica.

Finalmente, presentamos los 5 problemas de la XXIX Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico. Los alumnos tuvieron 4 horas para resolverlos.

Problema 1. Llamamos a un conjunto ordenado de 5 números enteros (o 5-tupla) *reordenable* si a sus elementos se le pueden asignar los rótulos a, b, c, d, e en algún orden de manera que $a-b+c-d+e=29$. Determinar todas las 2017-tuplas de números enteros $n_1, n_2, \ldots, n_{2017}$ tales que si los colocamos alrededor de un círculo en orden de las manecillas del reloj entonces cualquier 5-tupla de números en posiciones consecutivas del círculo es reordenable.

Problema 2. Sean ABC un triángulo con $AB < AC$ y D el punto de intersección de la bisectriz interna del $\angle BAC$ con el circuncírculo de ABC. Sea Z el punto de intersección de la mediatriz de AC con la bisectriz externa del $\angle BAC$. Demostrar que el punto medio del segmento AB está sobre el circuncírculo del triángulo ADZ.

Problema 3. Denotamos por $A(n)$ el número de sucesiones $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k$ de números enteros positivos para los cuales se cumple que $a_1 + \cdots + a_k = n$ y cada $a_i + 1$ es una potencia de dos (para $i = 1, 2, \ldots, k$). Denotamos por $B(n)$ el número de sucesiones $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_m$ de números enteros positivos para los cuales se cumple que $b_1 + \cdots + b_m = n$ y también que $b_j \geq 2b_{j+1}$ (para $j = 1, 2, \ldots, m-1$). Demostrar que $A(n) = B(n)$ para cada entero positivo n.

Problema 4. Decimos que un número racional r es *potente* si r se puede expresar de la forma $\frac{p^k}{q}$ para algunos enteros positivos p y q primos relativos y para algún entero $k > 1$. Sean a, b, c números racionales positivos tales que $abc = 1$. Si existen enteros positivos x, y, z tales que $a^x + b^y + c^z$ es un número entero, demostrar que a, b y c son todos potentes.

Problema 5. Sea n un entero positivo. Una pareja de n-tuplas $(a_1, \ldots, a_n)$ y $(b_1, \ldots, b_n)$ de elementos enteros se llama una *pareja exquisita* si

$$|a_1b_1 + \cdots + a_nb_n| \leq 1.$$

Determinar el número máximo de n-tuplas distintas de elementos enteros tales que cualesquiera dos forman una pareja exquisita.

6ª Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas

Del 6 al 12 de abril de 2017 se llevó a cabo la sexta edición de la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO por sus siglas en inglés) en la ciudad de Zürich, Suiza. La delegación mexicana estuvo integrada por Ana Paula Jiménez Díaz (Ciudad de México), Marcela Cruz Larios (Campeche), Nuria Sydykova Méndez (Ciudad de México) y Cristina Irene Sotomayor Vivas (Ciudad de México). Los profesores que acompañaron a la delegación fueron Isabel Hubard Escalera (líder) y Enrique Treviño (tutor).

Los resultados fueron muy satisfactorios. Ana Paula obtuvo una medalla de plata, mientras que Marcela, Nuria y Cristina obtuvieron medallas de bronce. Además en el puntaje por países, México ocupó el lugar 14 de 44 países participantes.

Aunque este concurso es europeo, se invitan a países de otros continentes. México ha sido invitado desde 2014 y esta es la cuarta ocasión en que participa.

Usualmente la participación de las mujeres en las olimpiadas internacionales de matemáticas es de entre el 10 y el 20 por ciento del total de participantes. Conscientes de la necesidad de enriquecer la formación de las niñas en esta área del conocimiento, algunos países europeos como Inglaterra, Turquía y Luxemburgo, impulsaron la *European Girl's Mathematical Olympiad* (EGMO). En este concurso pueden competir mujeres de hasta 20 años de edad que hayan sido seleccionadas en las olimpiadas nacionales de cada país.

A continuación presentamos los problemas de la 6^a Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas. Las alumnas tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo que cumple que $\angle DAB = \angle BCD = 90^\circ$ y $\angle ABC > \angle CDA$. Sean Q y R puntos en los segmentos BC y CD, respectivamente, tales que la recta QR interseca las rectas AB y AD en los puntos P y S, respectivamente. Se sabe que $PQ = RS$. Sea M el punto medio de BD y sea N el punto medio de QR. Demuestra que los puntos M, N, A y C están en una misma circunferencia.

Problema 2. Encuentra el menor entero positivo k para el cual existe una coloración de los enteros $\mathbb{Z}_{>0}$ con k colores y una función $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ que cumpla las siguientes dos propiedades:

1) Para cualesquiera enteros positivos m, n del mismo color, $f(m+n) = f(m)+f(n)$.

2) Existen enteros positivos m, n tales que $f(m + n) \neq f(m) + f(n)$.

En una coloración de $\mathbb{Z}_{>0}$ con k colores, cada entero se colorea con exactamente uno de los k colores. Tanto en 1) como en 2) los enteros positivos m, n no son necesariamente diferentes.

Problema 3. Se consideran 2017 rectas en el plano tales que no hay tres de ellas que pasen por el mismo punto. La hormiga Turbo se coloca en un punto de una recta (distinto de los puntos de intersección) y empieza a moverse sobre las rectas de la siguiente manera: se mueve en la recta en la que está hasta que llega al primer punto de intersección, ahí cambia de recta torciendo a la izquierda o a la derecha, alternando su elección en cada intersección a la que llega. Turbo solo puede cambiar de dirección en los puntos de intersección. ¿Puede existir un segmento de recta por el cual la hormiga viaje en ambos sentidos?

Problema 4. Sea $n \geq 1$ un entero y sean $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ enteros positivos. En un grupo de $t_n + 1$ personas, se juegan algunas partidas de ajedrez. Dos personas pueden jugar entre sí a lo más una vez. Demuestra que es posible que las siguientes dos condiciones se den al mismo tiempo:

1) El número de partidas jugadas por cada persona es uno de los números $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

2) Para cada i con $1 \leq i \leq n$, hay al menos una persona que juega exactamente t_i partidas de ajedrez.

Problema 5. Sea $n \geq 2$ un entero. Una n-tupla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de enteros positivos no necesariamente distintos es *costosa* si existe un entero positivo k tal que

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdots (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

a) Encuentra todos los enteros $n \geq 2$ para los cuales existe una n-tupla costosa.

b) Demuestra que para todo entero positivo impar m existe un entero $n \geq 2$ tal que m pertenece a una n-tupla costosa.

Hay exactamente n factores en la parte izquierda de la igualdad.

Problema 6. Sea ABC un triángulo acutángulo que no tiene dos lados con la misma longitud. Las reflexiones del baricentro G y el circuncentro O de ABC con respecto a los lados BC, CA y AB se denotan como G_1, G_2, G_3, y O_1, O_2, O_3, respectivamente. Demuestra que los circuncírculos de los triángulos G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A y ABC tienen un punto en común.
El baricentro (o gravicentro) de un triángulo es el punto de intersección de sus tres medianas. Una mediana es el segmento que conecta un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto.

Soluciones de Olimpiadas Internacionales

9ª Romanian Master of Mathematics

Solución del problema 1. (Solución de Víctor Hugo Almendra Hernández). Sea

$$S_{x_1,x_2,\ldots,x_a}=\sum_{j=1}^{a}(-1)^{j-1}\cdot 2^{x_j}.$$

Lema 1 Si $0\leq m_1<m_2<\cdots<m_{2k+1}$, entonces

$$2^{m_{2k+1}-1}\leq S_{m_1,m_2,\ldots,m_{2k+1}}\leq 2^{m_{2k+1}}.$$

Demostración: Como $0\leq m_1<m_2<\cdots<m_{2k+1}$, entonces $2^{m_i}-2^{m_{i+1}}<0$. Así,

$$\begin{aligned}S_{m_1,m_2,\ldots,m_{2k+1}}&=(2^{m_1}-2^{m_2})+(2^{m_3}-2^{m_4})+\cdots+(2^{m_{2k-1}}-2^{m_{2k}})+2^{m_{2k+1}}\\&\leq 2^{m_{2k+1}},\end{aligned}$$

esto es, $S_{m_1,m_2,\ldots,m_{2k+1}}\leq 2^{m_{2k+1}}$.
Ahora, se probará que $2^{m_{2k+1}-1}\leq S_{m_1,m_2,\ldots,m_{2k+1}}$. Por la misma observación anterior tenemos que

$$\begin{aligned}&-2^{m_1}+(2^{m_2}-2^{m_3})+(2^{m_4}-2^{m_5})+\cdots+(2^{m_{2k-2}}-2^{m_{2k-1}})+2^{m_{2k}}\\&\leq 2^{m_{2k}}\\&\leq 2^{m_{2k+1}-1},\end{aligned}$$

donde la última desigualdad es porque $m_{2k}<m_{2k+1}$. Por tanto,

$$2^{m_2}+2^{m_4}+\cdots+2^{m_{2k}}-(2^{m_1}+2^{m_3}+\cdots+2^{m_{2k-1}})\leq 2^{m_{2k+1}-1},$$

es decir, $2^{m_{2k+1}-1} \leq 2^{m_1} + 2^{m_3} + \cdots + 2^{m_{2k+1}} - (2^{m_2} + 2^{m_4} + \cdots + 2^{m_{2k}}) = S_{m_1,m_2,\ldots,m_{2k+1}}$, que es lo que se buscaba. $\square$

Si $n = S_{m_1,m_2,\ldots,m_{2k+1}}$, entonces m_{2k+1} es el único entero m que cumple que $2^{m-1} < n \leq 2^m$. Lo anterior determina el valor de m_{2k+1}.
Ahora, basta con probar el inciso a) para los enteros n impares. En efecto, si $n = 2^{\alpha} \cdot n_1$, con n_1 impar y $\alpha > 1$, es posible llegar de una representación de n_1 a una de n al multiplicar por 2^{α}; además, dado que $1 + 2 + \cdots + 2^a = 2^{a+1} - 1 < 2^{a+1}$, entonces de una representación de n se puede llegar a una de n_1 al dividir entre 2^{α}. Por tanto, se puede suponer que n es impar.
Si $n = S_{m_1,m_2,\ldots,m_{2k+1}}$ y $0 \leq m_1 < m_2 < \cdots < m_{2k+1}$, entonces $m_1 = 0$.

Lema 2 Si $0 = m_1 < m_2 < \cdots < m_{2a}$, entonces

$$1 - 2^{m_{2a}-1} \geq S_{m_1,m_2,\ldots,m_{2a}} \geq 1 - 2^{m_{2a}}.$$

Demostración: Por definición, tenemos que

$$S_{m_1,m_2,\ldots,m_{2a}} = 1 - (2^{m_2} - 2^{m_3} + \cdots + 2^{m_{2a}}) = 1 - S_{m_2,\ldots,m_{2a}}.$$

Por el lema 1, $2^{m_{2a}-1} \leq S_{m_2,\ldots,m_{2a}} \leq 2^{m_{2a}}$. Así, $1 - 2^{m_{2a}-1} \geq S_{m_1,m_2,\ldots,m_{2a}} \geq 1 - 2^{m_{2a}}$. $\square$

Por el lema 2, una vez que se determine m_{2k+1}, entonces m_{2k} también está determinado y $m_{2k} < m_{2k+1}$. Ahora, se probará el inciso a) por inducción en los impares. La base de inducción es $n = 1$. Tiene una única representación con $k = 0$ y $m_1 = 0$. En efecto, si $k > 0$,

$$1 = S_{m_1,m_2,\ldots,m_{2k+1}} = 2^{m_1} + (2^{m_3} - 2^{m_2}) + \cdots + (2^{m_{2k+1}} - 2^{m_{2k}}) > 2^{m_1} \geq 1,$$

lo cual es una contradicción.
Se supondrá que todos los impares menores a $3 \leq n$ tienen una única representación. Ahora, dado un entero n, se sabía que se podían encontrar m_{2k+1} y m_{2k} tales que $1 \leq m_{2k} < m_{2k+1}$. Además, por construcción $n - 2^{m_{2k+1}} + 2^{m_k} > 0$. Así, $n - 2^{m_{2k+1}} + 2^{m_k}$ es impar y es menor que n. Por hipótesis de inducción, sea $n - 2^{m_{2k+1}} + 2^{m_k} = S_{m_1,m_2,\ldots,m_{2k-1}}$, la única representación del número. Se sabe que $n \leq 2^{m_{2k+1}}$, entonces $S_{m_1,m_2,\ldots,m_{2k-1}} \leq 2^{m_{2k}}$. Además, $2^{m_{2k-1}-1} < S_{m_1,m_2,\ldots,m_{2k-1}}$. Por tanto, $m_{2k-1} - 1 < m_{2k}$, es decir, $m_{2k-1} \leq m_{2k}$.
Si $m_{2k-1} = m_{2k}$, entonces $n = S_{m_1,m_2,\ldots,m_{2k-2},m_{2k+1}}$ es la única representación que cumple. Ahora, si $m_{2k-1} < m_{2k}$, $n = S_{m_1,m_2,\ldots,m_{2k},m_{2k+1}}$ es la única representación que cumple. Con lo que se concluye el inciso a).
Para el inciso b), se notará que como solo se consideran los enteros positivos menores o iguales que 2^{2017}, la cantidad de enteros con peso k es $\binom{2018}{k+1}$. En efecto, se eligen $2k+1$ potencias de entre $2^0, 2^1, \ldots, 2^{2017}$ y por el inciso a) se sabe que el número que se obtiene solo se puede obtener de esa forma. Además, el número que se obtiene en ese procedimiento es menor o igual a 2^{2017}, dado que de las $2k+1$ potencias, se ordenan sus coeficientes de forma que $m_1 < m_2 < \cdots < m_{2k+1}$ y se toma $S_{m_1,m_2,\ldots,m_{2k+1}}$.

Por lo tanto, el número buscado es

$$\binom{2018}{1}+\binom{2018}{5}+\cdots+\binom{2018}{2017}-\left(\binom{2018}{3}+\binom{2018}{7}+\cdots+\binom{2018}{2015}\right)=M.$$

Para obtener el valor exacto de la expresión anterior, notemos que $2^{2018}=(i^2-1)^{2018}$. Ahora, como $i^2-1=(i-1)(i+1)$, entonces $2^{2018}=(i-1)^{2018}\cdot(i+1)^{2018}$. Por otro lado, tenemos que

$$(i-1)^{2018}=\binom{2018}{0}+\binom{2018}{4}+\cdots+\binom{2018}{2016}-\left(\binom{2018}{2}+\cdots+\binom{2018}{2018}\right)-iM$$

y

$$(i+1)^{2018}=\binom{2018}{0}+\binom{2018}{4}+\cdots+\binom{2018}{2016}-\left(\binom{2018}{2}+\cdots+\binom{2018}{2018}\right)+iM.$$

Pero, $\binom{2018}{4k}=\binom{2018}{2018-4k}$. Así,

$$\binom{2018}{0}=\binom{2018}{2018},\binom{2018}{4}=\binom{2018}{2014},\ldots,\binom{2018}{2016}=\binom{2018}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\binom{2018}{0}+\binom{2018}{4}+\cdots+\binom{2018}{2016}=\binom{2018}{2}+\cdots+\binom{2018}{2018}.$$

En conclusión, $(i-1)^{2018}=-iM$ y $(i+1)^{2018}=iM$. Lo anterior implica que $2^{2018}=(i-1)^{2018}\cdot(i+1)^{2018}=-i^2M^2$. Por lo tanto, $M=2^{1009}$, con lo que se concluye el problema.

Solución del problema 2. (Solución de Alfredo Alef Pineda Reyes). Se demostrará que $n=2$ es el único entero que cumple con las condiciones del problema. Si $n=1$, se tiene que la única opción es que $k=1$ y se desean encontrar dos enteros distintos x_1,x_2 tales que $P(x_1)=P(x_2)$, para cualquier polinomio mónico $P(x)=x+b$. Sin embargo, la condición anterior es equivalente a que $x_1+b=x_2+b$, es decir, a que $x_1=x_2$, una contradicción.
Ahora, si $n=2$, se puede tener un polinomio mónico de la forma $P(x)=x^2+ax+b$. En este caso $(x_1,x_2)=(0,-a)$ o $(x_1,x_2)=(1,-a-1)$ funcionan y alguna de las dos garantiza que los dos enteros son diferentes. En efecto, si $(x_1,x_2)=(0,-a)$, entonces $P(x_1)=b=a^2-a(a)+b=P(x_2)$. Además, si $(x_1,x_2)=(1,-a-1)$, entonces $P(x_1)=1+a+b=a^2+2a+1-a(1+a)+b=(a+1)^2-(1+a)a+b=P(x_2)$. Por otro lado, si $P(x)=x+b$, entonces se pueden encontrar tres enteros distintos tales que $x_1+x_2-x_3=-b$; a saber, $(x_1,x_2,x_3)=(b,2b,4b)$ si $b\neq 0$ y $(x_1,x_2,x_3)=(1,2,3)$ si $b=0$. Así, $P(x_1)+P(x_2)=x_1+x_2+2b=x_3-b+2b=x_3+b=P(x_3)$. En conclusión, $n=2$ es una solución como se deseaba.
Resta demostrar que si $n\geq 3$, entonces no se cumplen las condiciones del problema. Sea $n=p_1^{e_1}\cdots p_k^{e_k}$ con p_i primo para todo $1\leq i\leq k$ y $e_k\geq e_i$ para todo $1\leq i\leq$

$k-1$. Se demostrará que $x^{\phi(n)+e_k} \equiv x^{e_k} \pmod{n}$. Por el teorema chino del residuo, es suficiente demostrar que $x^{\phi(n)+e_k} \equiv x^{e_k} \pmod{p_i^{e_i}}$.
Para cada i, si $\text{mcd}(x, p_i) = 1$, se sabe que la función de ϕ de Euler es multiplicativa y que es válido el teorema de Euler. Así,

$$\left(x^{\phi(p_i^{e_i})}\right)^{\phi(n)/\phi(p_i^{e_i})} \equiv \left(x^{\phi(p_i^{e_i})}\right)^{\phi\left(n/p_i^{e_i}\right)} \equiv 1 \pmod{p_i^{e_i}}.$$

Ahora, si p_i divide a x, entonces, $p_i^{e_i}$ divide a $p_i^{e_k}$, que divide a su vez a x^{e_k} y a $x^{\phi(n)+e_k}$, dado que $e_x \geq e_i$. Por lo tanto, $x^{\phi(n)+e_k} - x^{e_k}$ es divisible por $p_i^{e_i}$. En conclusión, $x^{\phi(n)+e_k} \equiv x^{e_k} \pmod{n}$.
Si e_k es impar, se considerará el polinomio $P(x) = x^{\phi(n)+e_k} + (n-1)x^{e_k} + 1 \equiv x^{\phi(n)+e_k} - x^{e_k} + 1 \equiv 1 \pmod{n}$.
Como $k \equiv P(x_1) + P(x_2) + \cdots + P(x_k) \equiv P(x_{k+1}) \equiv 1 \pmod{n}$ y dado que $k \leq n$, tenemos que $k = 1$ y, por tanto, existen enteros distintos x_1 y x_2 tales que $P(x_1) = P(x_2)$. Sea $m = \phi(n) + e_k$ y, sin pérdida de generalidad, se puede asumir que $x_1 > x_2$. Así, $(x_1^m - x_2^m) + (n-1)(x_1^{e_k} - x_2^{e_k}) = 0$. Dado que e_k es impar y $\phi(n)$ es par para $n \geq 2$, se tiene que m es impar. Lo anterior implica que $x_1^m > x_2^m$ y $x_1^{e_k} > x_2^{e_k}$; es decir, $(x_1^m - x_2^m) + (n-1)(x_1^{e_k} - x_2^{e_k}) = 0$ es imposible.
Ahora, sea e_k un número par. Primero se verá que $\phi(n) + e_k + 1 \leq n$ o que $n = 4$. Si $n = 4$, el polinomio $P(x) = x^4 + 7x^2 - 4x + 1$ no funciona. En efecto, $x^4 \equiv x^2 \pmod{4}$ para todos los enteros x, así que $P(x) \equiv 8x^2 - 4x + 1 \equiv 1 \pmod{4}$. Por tanto, $k \equiv P(x_1) + P(x_2) + \cdots + P(x_k) \equiv P(x_{k+1}) \equiv 1 \pmod{4}$, así que $k = 1$ dado que $k \leq 4$. En conclusión, deberían existir dos enteros x_1 y x_2 tales que $P(x_1) = P(x_2)$, es decir, $(x_1^4 - x_2^4) + 7(x_1^2 - x_2^2) - 4(x_1 - x_2) = 0$. Como $x_1 \neq x_2$, $(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) + 7(x_1 + x_2) = 4$; es decir, $(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 + 7) = 9$. Lo cual es imposible pues $x_1 + x_2 \neq 0$ y $\mid x_1^2 + x_2^2 + 7 \mid > 9$.
Si n no es un potencia de un primo, entonces la desigualdad $\phi(n) + e_k + 1 \leq n$ se cumple pues $p_k, p_k^2, \ldots, p_k^{e_k}, p_i$ no son primos relativos a n, son menores que n y todos son distintos.
Ahora, sea $n = p_k^{e_k}$. Asume que $p_k = 2$ y que $n > 4$, se tiene que $6, p_k, \ldots, p_k^{e_k}$ no son primos relativos a $p_k^{e_k}$, todos son distintos y son menores o iguales a n. Si $p_k > 2$, entonces, $2p_k, p_k, \ldots, p_k^{e_k}$ no son primos relativos a $p_k^{e_k}$, todos son distintos y son menores o iguales a n ($2p_k \leq p_k^{e_k}$ pues $e_k \geq 2$, al ser par).
Por último, considera el polinomio $P(x) = x^{\phi(n)+e_k+1} + (n-1)x^{e_k+1} + 1 \equiv 1 \pmod{n}$. De manera análoga a los casos anteriores, se necesitan dos enteros x_1 y x_2 tales que $P(x_1) = P(x_2)$, es decir, $x_1^m + (n-1)x_1^{e_k+1} = x_2^m + (n-1)x_2^{e_k+1}$, con $m = \phi(n) + e_k + 1$. No obstante, m y $e_k + 1$ son ambos impares, entonces $x_1^m > x_2^m$ y $x_1^{e_k+1} > x_2^{e_k+1}$, es decir, $x_1^m + (n-1)x_1^{e_k+1} = x_2^m + (n-1)x_2^{e_k+1}$ es imposible. En conclusión, $n \geq 3$ no funciona y se concluye el problema.

Solución del problema 3. (Solución de Ilya Bogdanov). El máximo requerido es $2n-2$. Para describir una coleción de $2n-2$ elementos que satisface las condiciones requeridas, consideremos $X = \{1, 2, 3 \ldots, n\}$ y $B_k = \{1, 2, \ldots, k\}$ si $k = 1, 2, \ldots, n-1$, y $B_k = \{k-n+2, k-n+3, \ldots, n\}$ si $k = n, n+1, \ldots, 2n-2$. Para mostrar que ninguna subcolección de los B_k es estrecha, considera una subcolección

$\mathcal{C}$ cuya unión U es un subconjunto propio de X, sea m un elemento de $X \setminus U$ y observemos que $\mathcal{C}$ es una subcolección de $\{B_1, \ldots, B_{m-1}, B_{m+n-1}, \ldots, B_{2n-2}\}$ pues las otras B_j son precisamente las que contienen a m. Si U contiene elementos menores que m, sea k el mayor de ellos y observemos que B_k es el único miembro de $\mathcal{C}$ que contiene a k, mientras que si U contiene elementos mayores que m, tomamos k como el menor de ellos y observamos que B_{k+n-2} es el único miembro de $\mathcal{C}$ que contiene a k. Como consecuencia, $\mathcal{C}$ no es estrecha.

Procedemos ahora por inducción para probar que si $n \geq 2$, la cardinalidad de una colección de subconjuntos propios no vacíos de X que no contenga subcolecciones estrechas, no puede ser mayor que $2n-2$. El caso base $n = 2$ es claro, por lo que supongamos que $n > 2$ y supongamos, si es posible, que $\mathcal{B}$ es una colección de $2n-1$ subconjuntos propios de X que no contiene subcolecciones estrechas.

Comenzamos observando que $\mathcal{B}$ tiene intersección vacía, en efecto, si los miembros de $\mathcal{B}$ compartieran un elemento x, entonces $\mathcal{B}' = \{\mathcal{B} \setminus \{x\} : B \in \mathcal{B}, B \neq \{x\}\}$ sería una subcolección con al menos $2n-2$ subconjuntos propios no vacíos de $X \setminus \{x\}$ que no contiene subcolecciones estrechas, lo cual contradice la hipoótesis.

Ahora, para cada $x \in X$, sea $\mathcal{B}_x$ la intersección no vacía de los miembros de $\mathcal{B}$ que no contienen a x. Como ninguna subcolección de $\mathcal{B}$ es estrecha, $\mathcal{B}_x$ tampoco lo es, y como la unión de $\mathcal{B}_x$ no contiene a x, entonces algún x' en X está cubierto por un único miembro de $\mathcal{B}_x$. En otras palabras, *existe un único conjunto en $\mathcal{B}$ que cubre x' pero no x*. En este caso, dibujamos una flecha de x a x'. Como existe al menos una flecha que parte de cada x de X, algunas de estas flechas formarán un ciclo minimal $x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_k \to x_{k+1} = x_1$ para algún entero apropiado $k \geq 2$. Sea A_i el único miembro de $\mathcal{B}$ que contiene x_{i+1} pero no x_i, y sea $X' = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$.

Eliminamos $A_1, A_2, \ldots, A_l$ de $\mathcal{B}$ para obtener una colección $\mathcal{B}'$ cuyos miembros o contienen X' o son disjuntos con X', ya que si un miembro B de $\mathcal{B}'$ está contenido en alguno pero no todos los elementos de X', entonces B debe contener a x_{i+1} pero no a x_i para alguna i, y entonces $B = A_i$ es una contradicción. Esto descarta el caso en que $k = n$ pues de lo contrario $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, de modo que concluimos $|\mathcal{B}| < 2n-1$.

Para descartar el caso $k < n$, consideramos un elemento extra x^* fuera de X y tomamos

$$\mathcal{B}^* = \{B : B \in \mathcal{B}', B \cap X' = \varnothing\} \cup \{(B \setminus X') \cup \{x^*\} : B \in \mathcal{B}', X' \subseteq B\}.$$

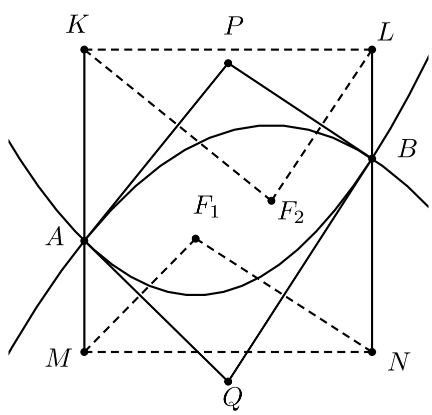
y por tanto, en cada miembro de $\mathcal{B}'$ que contiene a X', el último se colapsa a $\{x^*\}$. Observa que $\mathcal{B}^*$ es una colección de subconjuntos propios no vacíos de $X^* = (X \setminus X') \cup \{x^*\}$ y que no tiene subcolecciones estrechas. Por hipótesis de inducción, $|\mathcal{B}'| = |\mathcal{B}^*| \leq 2|X^*| - 2 = 2(n-k)$, de modo que $|\mathcal{B}| \leq 2(n-k) + k = 2n-k < 2n-1$, la cual es la contradicción final.

Solución del problema 4. (Solución de Leonardo Ariel García Morán). Demostraremos primero el siguiente lema auxiliar.

Lema. Sea $\mathcal{P}$ una parábola con foco F y directriz ℓ. Para un punto X sobre $\mathcal{P}$, sea Y la proyección de X sobre ℓ. Entonces, la tangente a $\mathcal{P}$ por X biseca el ángulo entre XF y XY.

Prueba del lema. Supongamos, por contradicción, que la bisectriz interna del ángulo $\angle FXY$ corta a $\mathcal{P}$ por segunda vez en Z. Ya que $XF = XY$ y $\mathcal{P}$ es una parábola, se sigue que Z es un punto en la mediatriz de FY y por lo tanto $ZF = ZY$. Sea Z' la proyección de Z sobre ℓ. De nuevo por ser parábola $\mathcal{P}$, se tiene que $FZ = ZZ'$, por lo tanto $ZZ' = ZY$ y la proyección es el único punto que tiene esa distancia. Por lo tanto, $Z' = Y$ lo cual implica que Z y X son el mismo punto (pues una recta perpendicular a la directriz de $\mathcal{P}$ interseca en un único punto a la parábola), pero esto último es una contradicción pues X y Z se tomaron distintos. $\square$

Regresando al problema, sea P la intersección de las tangentes a G_2 por A y B, ℓ_2 la directriz de G_2 y K y L las proyecciones de A y B sobre ℓ_2, respectivamente. Entonces $AK = AF_2$ puesto que G_2 es una parábola. Por el lema anterior, AP biseca el ángulo $\angle F_2AK$ y por lo tanto, es la mediatriz de KF_2. Análogamente, BP es la mediatriz de LF_2, por lo tanto P es el circuncentro del triángulo KF_2L el cual está sobre la mediatriz del segmento KL. Análogamente, si Q es la intersección de las tangentes por A y B a G_1, M y N las proyecciones de A y B sobre la mediatriz ℓ_1 de G_1, respectivamente, se tiene que Q está en la mediatriz de MN. Mas aún, ya que G_1 y G_2 son parábolas verticales, sus directrices son paralelas al eje x por definición y por lo tanto, $KLMN$ es un rectángulo. Luego, PQ es la mediatriz común de KL y MN.



Para concluir, demostraremos que $APBQ$ tiene un incírculo si y solo si $AP - AQ = BP - BQ$. Una vez fijados A, P y Q, el lugar geométrico de los puntos B que satisfacen esta relación de distancias es la rama de una hipérbola con focos P y Q. Ya que LN es paralela al eje focal PQ de esta hipérbola, se tiene que LN corta a esta rama en un único punto. Sea A' la reflexión de A sobre PQ, entonces A' está sobre LN y claramente $PA - AQ = PA' - A'Q$. Se sigue de esto que $A' = B$. Luego AB es paralela a KL y MN, y por lo tanto PQ es la mediatriz de AB, por lo cual la mediatriz de AB es perpendicular a las directrices de f_1 y f_2 y, por lo tanto, AB es paralela a estas mismas directrices. Se sigue que A y B son simétricos respecto a los ejes de simetría de $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ y, por lo tanto, estos ejes coinciden.

Solución del problema 5. Dado A, $m(A) = 2n - 2$, lo cual se logra, por ejemplo,

separando A a lo largo de todas las líneas verticales y horizontales de la cuadrícula. Falta probar que $m(A) \geq 2n-2$ para todo A.
Por *agujero* nos referimos a las celdas que se recortan del tablero. La *cruz* de un agujero en A es la unión de la fila y la columna que pasan por ese agujero.
Argumentamos indirectamente, considerando una división de A en $2n-3$ o menos tiras. Las tiras horizontales se etiquetan como h y las tiras verticales con v. Las tiras de 1×1 son tanto verticales como horizontales y se etiquetan arbitrariamente. Cada celda de A hereda la etiqueta de la única tira que la contiene.
Asignamos a cada tira en la disección a la cruz del único agujero en su fila, si es horizontal, o en su columna, si es vertical.
Como hay a lo más $2n-3$ tiras y exactamente n cruces, habrá dos cruces cada una de las cuales estará asignada a lo más a una tira en la división. Sean c y d las cruces centradas en $a = (x_a, y_a)$ y $b = (x_b, y_b)$, respectivamente, y suponemos sin pérdida de generalidad que $x_a < x_b$ y que $y_a < y_b$. Las tiras que cubren las celdas (x_a, y_b) y (x_b, y_a) tienen etiquetas similares, pues de lo contrario alguna de las cruces sería asignada a almenos dos tiras. Digamos que la etiqueta común es v, de modo que tanto c como d contienen una tira que cubre una de esas dos celdas. Esto quiere decir que el brazo inferior de c y el superior de d tiene sólo etiquetas h y que los brazos horizontales de ambas cruces son todas v, tal y como ilustra la siguiente figura.

							h			
							h			
							h			
v	v	v	v	v	v	v	b	v	v	v
v	v	v	a	v	v	v	v	v	v	v
			h							
			h							
			h							

Cada uno de los renglones entre los renglones a y b, esto es, los renglones $y_a+1, y_a+2, \ldots, y_b-1$ contiene un agujero. La columna de cada uno de esos agujeros contiene al menos dos tiras v. Todas las demás columnas contienen al menos una tira v cada una. Además, todas las filas debajo de a y todas las filas arriba de b contienen al menos una tira h. Esto lleva a un total de

$$2(y_b - y_a - 1) + (n - y_b + y_a + 1) + (n - y_b) + (y_a - 1) = 2n - 2$$

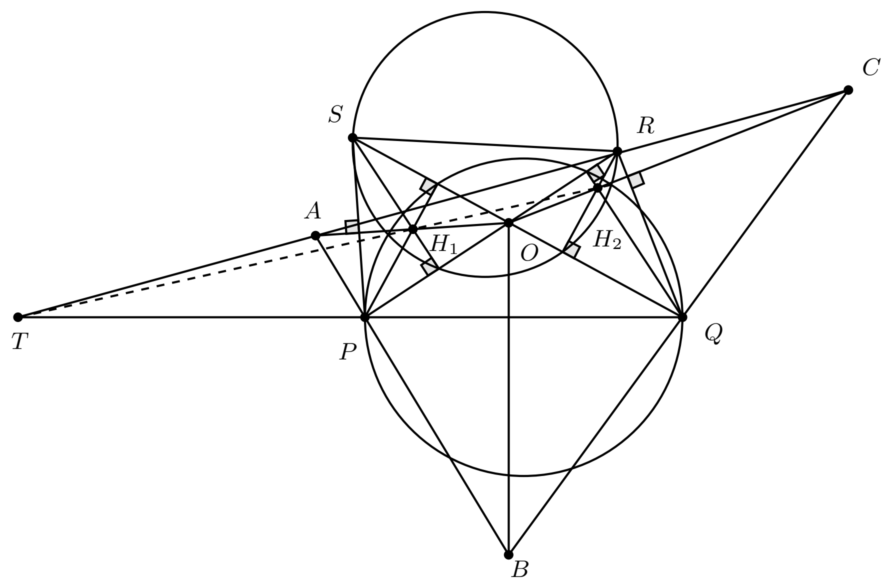
tiras, lo cual es una contradicción.

Solución del problema 6. Empecemos con un lema que es cierto en una configuración más general.
Lema. Sea $PQRS$ un cuadrilátero convexo cuyas diagonales se intersecan en O. Sean ω_1 y ω_2 los círculos de diámetros PQ y RS, respectivamente, y sea ℓ el eje radical

de ellos. Finalmente sean A, B, y C puntos fuera de este cuadrilátero de forma que: el punto P (respectivamente, Q) está sobre el segmento AB (respectivamente, BC); y $AO \perp PS$, $BO \perp PQ$, and $CO \perp QR$. Entonces, las tres líneas AC, PQ, y ℓ son concurrentes o paralelas.

Prueba del lema. Supongamos primero que las líneas PR y QS no son perpendiculares. Sean H_1 y H_2 los ortocentros de los triángulos OSP y OQR, respectivamente; note que H_1 y H_2 no coinciden. Puesto que H_1 es el centro radical de los círculos de diámetros RS, SP y PQ, se sigue que H_1 está sobre ℓ. Similarmente, H_2 está sobre ℓ, así que la línea ℓ es la misma que H_1H_2.

Los lados correspondientes de los triángulos APH_1 y CQH_2 se intersecan en los puntos O, B y el ortocentro del triángulo OPQ (el cual está sobre OB). Por el teorema de Desargues[9], las líneas AC, PQ y ℓ son concurrentes o paralelas.



El caso cuando $PR \perp QS$ se puede considerar como un caso límite puesto que la configuración en el enunciado permite cambios pequeños. Esto concluye la prueba del lema. $\square$

Regresando al problema, sea O el punto de intersección de PR y QS, sean ω_1 y ω_2 los círculos de diámetros PQ y RS, respectivamente, y sea ℓ su eje radical. Por el lema anterior, las líneas ℓ, AC y PQ concurren o son paralelas, de forma similar se concluye lo mismo para AC, RS y ℓ. Por lo tanto, si las líneas AC y ℓ son distintas, las cuatro líneas son concurrentes o paralelas por parejas.

Este es claramente el caso cuando las líneas PS y QR no son paralelas (puesto que ℓ pasa a través de OA y OC en los ortocentros de OSP y OQR, los cuales son distintos de A y C). En este caso denotemos por T al punto de intersección. Si T no es un

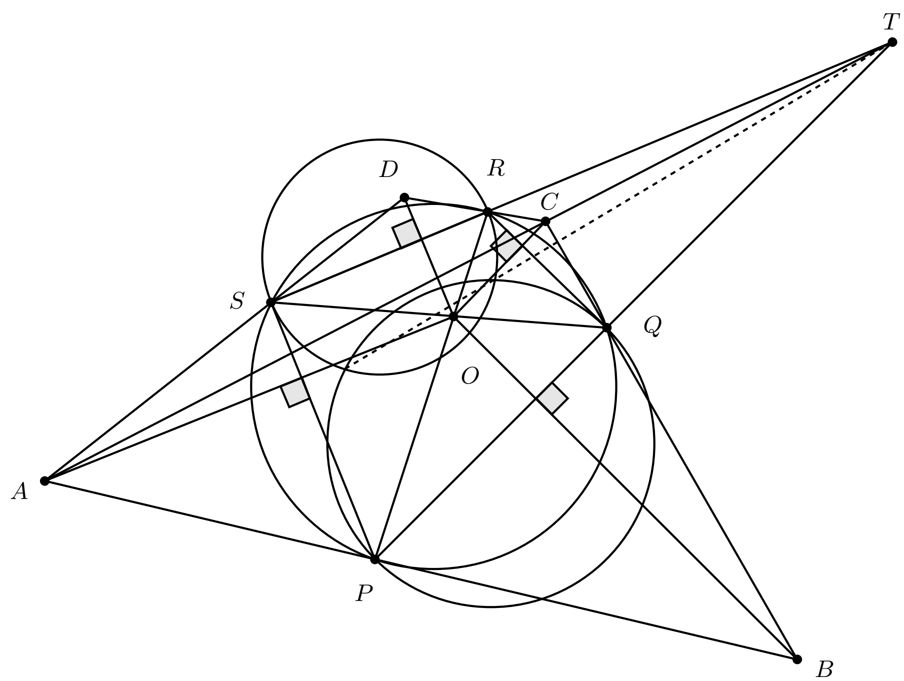
[9]Ver en el apéndice el teorema 22.

punto al infinito, entonces tenemos que $TP \cdot TQ = TR \cdot TS$ (puesto que $T \in \ell$), entonces $PQRS$ es cíclico. Si T es un punto al infinito (es decir, las cuatro líneas son paralelas), entonces los segmentos PQ y RS tienen la misma mediatriz (justo la línea de los centros de ω_1, ω_2), y de nuevo $PQRS$ es cíclico.

Supongamos ahora que PS y QR son paralelas. Por simetría, también podemos suponer que PQ y RS son paralelas, pues en caso contrario, renombbrando puntos y usando el argumento anterior, se concluiría. En este caso necesitamos probar que el paralelogramo $PQRS$ es un rectángulo.

Supongamos, por contradicción, que $OP > OQ$. Supongamos que la línea a través de O y paralela a PQ corta AB en M y a CB en N. Puesto que $OP > OQ$, el ángulo $\angle SPQ$ es agudo y el ángulo $\angle PQR$ es obtuso, así el ángulo $\angle AOB$ es obtuso, el ángulo $\angle BOC$ es agudo, M está sobre el segmento AB y N está sobre la extensión del segmento BC hacia C. Por lo tanto, $OA > OM$ puesto que el ángulo $\angle OMA$ es obtuso; $OM > ON$ ya que $\frac{OM}{ON} = \frac{KP}{KQ}$, donde K es la proyección de O sobre PQ; y $ON > OC$, puesto que el ángulo $\angle OCN$ es obtuso. Por lo tanto, $OA > OC$.

Similarmente, $OR > OS$ implica que $OC > OA$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $OP = OQ$ y $PQRS$ es un rectángulo. Esto termina la demostración.



XXIX Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico

A continuación presentamos las soluciones de la XXIX Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico.

Solución del problema 1. (Solución de Víctor Domínguez Silva). Se demostrará que todos los números deben de ser iguales. Así, gracias a la igualdad $a - b + c - d + e = 3a - 2a = a = 29$, se sabría que todos los números son iguales a 29. Claramente la 2017-tupla $29, 29, \ldots, 29$ es reordenable. De la misma forma, si todos los números son congruentes módulo algún entero m, entonces todos los números serán congruentes a 29 módulo m. Supongamos que $n_1, n_2, \ldots, n_{2017}$ es una 2017-tupla que cumple las condiciones del problema.

Lema 1: Si $n_i \equiv n_{i+5} \pmod{m}$ para todo entero i y para cierto entero m, entonces $n_i \equiv n_j \pmod{m}$ para todo par de enteros i, j, donde los subíndices se toman módulo 2017.

Demostración: Se tiene, por hipótesis, que $n_1 \equiv n_6 \equiv n_{11} \equiv \cdots \equiv n_{403\cdot 5+1} \equiv n_{2016} \equiv n_4 \equiv n_9 \equiv \cdots \equiv n_{402\cdot 5+4} \equiv n_{2014} \equiv n_2 \pmod{m}$, lo cual implica que $n_1 \equiv n_2 \pmod{m}$. Análogamente, tenemos que $n_2 \equiv n_3 \pmod{m}$, $n_3 \equiv n_4 \pmod{m}, \ldots, n_{2017} \equiv n_1 \pmod{m}$. Al juntar las congruencias anteriores, se obtiene que todos los números son congruentes entre sí módulo m. □

Lema 2: Si todas las sumas de 5 números consecutivos son congruentes con el mismo entero módulo m, entonces todos los números son congruentes entre sí módulo m.

Demostración: Se tiene que $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 \equiv n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 \pmod{m}$. Entonces, $n_1 - n_6 \equiv 0 \pmod{m}$; es decir, $n_1 \equiv n_6 \pmod{m}$. Análogamente, cada entero i cumple que $n_i \equiv n_{i+5} \pmod{m}$. Por el lema 1, todos los números son congruentes entre sí módulo m. □

Lema 3: Si todos los números son congruentes entre sí módulo 2^k para todo entero positivo k, entonces todos son 29.

Demostración: Se escoje k_0 tal que $2^{k_0} > \text{máx}\{|n_1| + 29, |n_2| + 29, \ldots, |n_{2017}| + 29\}$. Entonces, $\text{mín}\{n_1, n_2, \ldots, n_{2017}\} > -2^{k_0} + 29$ y $\text{máx}\{n_1, n_2, \ldots, n_{2017}\} < 2^{k_0} + 29$. Como todos los números son congruentes módulo 2^{k_0}, se sabe que son congruentes a 29 módulo 2^{k_0}; entonces, como todos se encuentran en el rango $(-2^{k_0} + 29, 2^{k_0} + 29)$, todos deben ser 29. □

Lema 4: Todos los números son congruentes con 29 módulo 2^k, para todo número natural k.

Demostración: Se demostrará el lema por inducción en k. En el caso base, $k = 1$, se tiene que $a-b+c-d+e \equiv a+b+c+d+e \pmod{2}$, donde a, b, c, d, e son números consecutivos con la etiqueta en ese orden. Por el lema 2 todos son congruentes módulo 2, entonces todos son congruentes con 29 módulo 2; es decir, todos son impares.
Ahora, se supondrá que $n_1 \equiv n_2 \equiv \cdots \equiv n_{2017} \pmod{2^k}$ y se demostrará que $n_1 \equiv n_2 \equiv \cdots \equiv n_{2017} \pmod{2^{k+1}}$. Sean a, b, c, d, e números consecutivos con la etiqueta en ese orden. Como b y d son impares, entonces $2^k(b+d) \equiv 0 \pmod{2^{k+1}}$; así, $a-b+c-d+e \equiv a+(2^k-1)b+c+(2^k-1)d+e \equiv 29 \pmod{2^{k+1}}$. Se sabe que $b \equiv d \equiv 29 \pmod{2^k}$, entonces, los números pueden ser congruentes a 29 o a $29+2^k$ módulo 2^{k+1}. Se harán los tres casos para analizar la congruencia de $(2^k-2)(b+d)$ módulo 2^{k+1}.

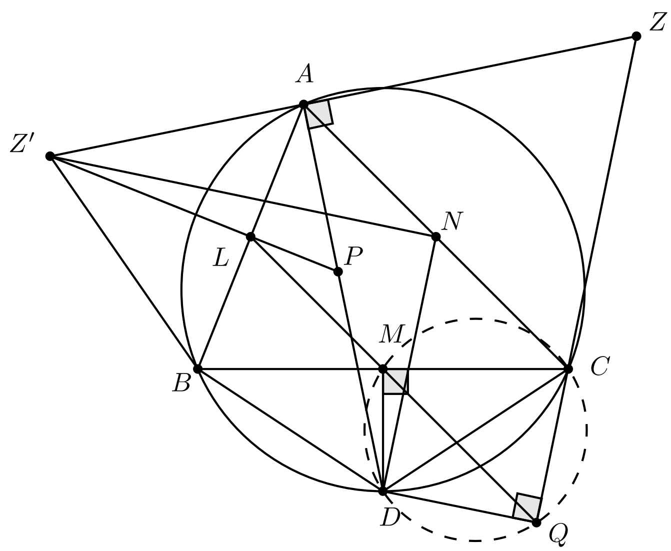
a) Si ambos son 29 módulo 2^{k+1}, entonces
$$(2^k-2)(b+d) \equiv 2(2^k-2)29 \equiv (2^{k+1}-4)29 \equiv -4\cdot 29 \pmod{2^{k+1}}.$$

b) Si ambos son $29+2^k$ módulo 2^{k+1}, entonces
$$(2^k-2)(b+d) \equiv (2^k-2)(2^{k+1}+2\cdot 29) \equiv (2^k-2)2\cdot 29 \equiv -4\cdot 29 \pmod{2^{k+1}}.$$

c) Si uno es congruente con 29 y el otro con $29+2^k$ módulo 2^{k+1}, entonces
$$(2^k-2)(b+d) \equiv (2^k-2)(2^k+2\cdot 29) \equiv 2^{2k}-2^{k+1}-2^{k+1}\cdot 29-4\cdot 29 \equiv -4\cdot 29 \pmod{2^{k+1}}.$$

En cualquier caso, tenemos que $(2^k-2)(b+d) = (2^k-2)b+(2^k-2)d$ tiene la misma congruencia módulo 2^{k+1}. Pero, $a+(2^k-1)b+c+(2^k-1)d+e \equiv 29 \pmod{2^{k+1}}$, entonces $a+b+c+d+e$ es congruente a un número fijo módulo 2^{k+1}, a saber: $5\cdot 29$. Por el lema 2 se sabe que todos son congruentes módulo 2^{k+1}, entonces todos son congruentes con 29 módulo 2^{k+1}, con lo que se termina la inducción.
El lema 4 junto con el lema 3 garantizan que todos los números deben ser 29 y se concluye el problema.

Solución del problema 2. (Solución de Isaac Jair Jiménez Uribe). Sean L el punto medio de AB, M el punto medio de BC, P la intersección de AD y la bisectriz de AB, Z' la intersección de LP y AZ, I la intersección de $Z'B$ con ZB y Q el punto de intersección de LM con IC. Sean $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$ y $\angle ACB = 2\gamma$. Entonces, $2\alpha+2\beta+2\gamma = 180°$, de donde se tiene que $\alpha+\beta+\gamma = 90°$. Sea N el punto medio de AC. Como AZ es bisectriz externa de $\angle BAC$, tenemos que
$$\angle ZAC = \frac{180° - \angle BAC}{2} = 90-\alpha = \beta+\gamma.$$
Como ZN es mediatriz, $\angle ZCA = \beta+\gamma$, como D es la intersección de la bisectriz y el circuncírculo, $BD = DC$ y $\angle BDC = 180-\angle BAC = 180°-2\alpha = 2\beta+2\gamma$. Por otro lado, al ser M punto medio de BC y $BD = DC$ se tiene que $\angle MDC = \angle BDM$, entonces $\angle MDC = \frac{\angle BDC}{2} = \beta+\gamma$. Como L y M son puntos medios de AB y BC, respectivamente, $\frac{BM}{MC} = \frac{BL}{LA} = 1$ entonces LM es paralela a AC, en especial LQ es paralela a AC, entonces $\angle ZCA = \angle LQC = \beta+\gamma = \angle MDC$. En particular, $MDQC$ es cíclico. Por lo tanto, $\angle CQD = 180°-\angle DMC = 90°$ (porque el triángulo BDC es isósceles y M es punto medio de BC). Luego, $\angle DMC = 90°$ y, por lo tanto, DM es altura y bisectriz.



Ahora, observemos que $\angle DAZ = \angle DAC = \angle CAZ = \alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$ pues $\angle DAC = \angle DAB$ por ser DA bisectriz del $\angle BAC$. Entonces $\angle DAZ + \angle DQZ = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, por lo tanto $DAQZ$ es cíclico. Ahora, $\angle LAZ = \angle BAC + \angle ZAC = 2\alpha + \beta + \gamma$ y $\angle LQZ + \angle LAZ = (\beta + \gamma) + (2\alpha + \beta + \gamma) = 180^\circ$, por lo tanto $ALQZ$ es cíclico. Para finalizar, veamos que como D pertenece al circuncírculo del triángulo AZQ y L también pertenece al circuncírculo de AZQ; $AZQDL$ es cíclico y por lo tanto L (punto medio medio AB) está sobre el circuncírculo del triángulo ADZ.

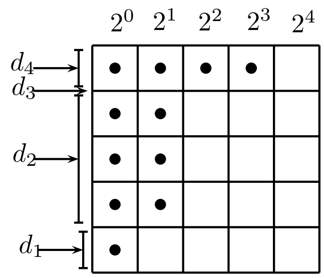
Solución del problema 3. (Solución de Oriol Solé Pi). Estableceremos una biyección entre las sucesiones de tipo A y las de tipo B. Para las de tipo A, notemos que los términos que se suman son de la forma $2^k - 1 = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{k-1}$. Entonces, las sucesiones tipo A las podemos ver como una suma de números que colocaremos en una tabla de la siguiente manera: cada columna corresponde a una potencia de 2, mientras que cada fila corresponde a uno de los términos de la sucesión. En la fila k, si $a_k = 2^{\alpha_k} - 1 = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{\alpha_k - 1}$, entonces se marcarán todas las casillas que correspondan a potencias de 2 entre 1 y $2^{\alpha_k - 1}$, inclusive. Por ejemplo, si $n = 25$ y la sucesión de tipo A es $2^4 - 1, 2^2 - 1, 2^2 - 1, 2^2 - 1, 2^1 - 1$, la tabla correspondiente es:

	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4
a_1	•	•	•	•	
a_2	•	•			
a_3	•	•			
a_4	•	•			
a_5	•				

Ahora, para las sucesiones de tipo B consideremos la sucesión d_i definida por $d_1 = b_1 - 2b_2, d_2 = b_2 - 2b_3, \ldots, d_{m-1} = b_{m-1} - 2b_m, d_m = b_m$ y por definición de la sucesión se tiene que todas las d_i son no negativas y además

$$n = \sum_{i=1}^{m} b_i = \sum_{i=1}^{m} d_i(1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{i-1}),$$

y entonces podemos representar fácilmente las d_i en una tabla donde las columnas corresponden a potencias de 2 y las d_i representan la cantidad de filas que llegan hasta cierta potencia de 2, en particular, d_i corresponde a la cantidad de filas en las que se marcan puntos hasta la columna que corresponde a 2^{i-1}. Por ejemplo, si $n = 25$ y la sucesión es $1, 2, 7, 15$, entonces las d_i son $1, 0, 3, 1$ y la tabla es:



Falta asegurarnos que ambas construcciones constituyen una biyección entre las sucesiones. Para ello, notemos que en ambos casos, la suma de las casillas de la tabla es n por construcción, que las a_i están en orden creciente y que cualquier representación de las d_i corresponde a una representación de valores a_i y viceversa, por lo que solo necesitamos verificar que existe una biyección entre las sucesiones tipo B y las sucesiones de d_i.

Supongamos que existen dos sucesiones tipo B con la misma sucesión d_i. Como $b_m = d_m = b'_m$, coincidirán en este mismo término. De hecho, si b_j es el último término en el que difieren, entonces tendremos $b_j \neq b'_j$ pero $b_{j+1} = b'_{j+1}$ y al aplicar la recursión obtendremos $b_j = b'_j$, lo cual es una contradicción.

Solución del problema 4. (Solución de Juan Eduardo Castanedo Hernández). Sean $a = \frac{a_1}{b_1}$ y $b = \frac{a_2}{b_2}$ donde $\text{mcd}(a_1, b_1) = \text{mcd}(a_2, b_2) = 1$. Entonces, $c = \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}$. La condición de que $a^x + b^x + c^x$ es un entero se traduce en

$$\frac{a_1^{x+z} a_2^z b_2^y + a_1^z a_2^{y+z} b_1^x + b_1^{x+z} b_2^{y+z}}{a_1^z a_2^z b_1^x b_2^y} \in \mathbb{Z},$$

que a su vez, puede reescribirse como

$$a_1^z a_2^z b_1^x b_2^y \mid a_1^{x+z} a_2^z b_2^y + a_1^z a_2^{y+z} b_1^x + b_1^{x+z} b_2^{y+z}. \tag{29}$$

En particular, a_1^z divide a $a_1^{x+z} a_2^z b_2^y + a_1^z a_2^{y+z} b_1^x + b_1^{x+z} b_2^{y+z}$. Como a_1^z divide al primero y al segundo términos en dicha suma, concluimos que $a_1^z \mid b_1^{x+z} b_2^{y+z}$. Como

$\text{mcd}(a_1, b_1) = 1$, se sigue que $a_1^z \mid b_2^{y+z}$.
Sea p un primo que divide a a_1. Sean m y n enteros positivos tales que $p^n \| a_1$ (esto es, $p^n \mid a_1$ pero $p^{n+1} \nmid a_1$) y $p^m \| b_2$. El hecho de que $a_1^z \| b_2^{y+z}$ implica que $nz \leq m(y+z)$. Como $\text{mcd}(a_1, b_1) = \text{mcd}(a_2, b_2) = 1$, tenemos que p no divide a b_1 y tampoco divide a a_2. Luego,

$$p^{nz} \| a_1^z a_2^{y+z} b_1^x \quad \text{y} \quad p^{m(y+z)} \| b_1^{x+z} b_2^{y+z}. \tag{30}$$

Por otra parte, la relación (29) implica que

$$p^{nz+my} \mid a_1^z a_2^{y+z} b_1^x + b_1^{x+z} b_2^{y+z}. \tag{31}$$

Si $nz < m(y+z)$, entonces la relación (30) implica que $p^{nz} \| a_1^z a_2^{y+z} b_1^x + b_1^{x+z} b_2^{y+z}$ lo que contradice (31). Por lo tanto, $nz = m(y+z)$ lo cual implica que n es divisible por $k := \frac{y+z}{\text{mcd}(z, y+z)} > 1$. Entonces, cada exponente en la descomposición en primos de a_1 debe ser divisible por k. Esto significa que a_1 es una k-potencia perfecta y por lo tanto, a es potente. De manera análoga, se demuestra que b y c son también potentes.

Solución del problema 5. La respuesta es $n^2 + n + 1$.
Primero, construiremos un ejemplo con $n^2 + n + 1$ n-tuplas, tales que cualesquiera dos de ellas forman una pareja exquisita. En lo que sigue, el símbolo $*$ representa cualquier número de ceros siempre y cuando el número total de entradas es n.

- $(*)$
- $(*, 1, *)$
- $(*, -1, *)$
- $(*, 1, *, 1, *)$
- $(*, 1, *, -1, *)$

Por ejemplo, para $n = 2$ tenemos las tuplas $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,-1)$, $(-1,0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$. El número total de tales tuplas es $1 + n + n + \binom{n}{2} + \binom{n}{2} = n^2 + n + 1$. Para cualesquiera dos de ellas, a lo más dos de los productos $a_i b_i$ son distintos de cero. El único caso en el cual dos de ellos son distintos de cero, es cuando tomamos una secuencia $(*, 1, *, 1, *)$ y una secuencia $(*, 1, *, -1, *)$ con entradas iguales a cero en las mismas posiciones. Pero en este caso un $a_i b_i$ es 1 y el otro es -1. Esto muestra que cualesquiera dos de estas sucesiones forman una pareja exquisita.
A continuación demostraremos que entre cualesquiera $n^2 + n + 2$ tuplas, hay dos que no forman una pareja exquisita. Para ello, comenzamos con un lema.
Lema. *Dadas $2n + 1$ n-tuplas no cero distintas de números reales, hay dos de ellas $(a_1, \ldots, a_n)$ y $(b_1, \ldots, b_n)$ que satisfacen que $a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n > 0$.*
Prueba. Procederemos por inducción en n. El caso $n = 1$ es fácil ya que para cada tres números no cero hay dos de ellos con el mismo signo. Supongamos que el resultado es cierto para $n - 1$ y consideremos $2n + 1$ tuplas con n entradas. Como estamos trabajando con tuplas de números reales, afirmamos que podemos asumir que una de

tales tuplas es $a = (0, 0, \ldots, 0, -1)$. Pospongamos la prueba de esta afirmación por el momento.
Si una de las restantes tuplas b tiene la última entrada negativa, entonces a y b satisfacen la condición deseada. Así que podemos asumir que todas las restantes tuplas tienen la última entrada no negativa. Ahora, de cada tupla borramos el último número. Si dos n-tuplas b y c generan la misma $(n-1)$-tupla, entonces

$$b_1c_1 + \cdots + b_{n-1}c_{n-1} + b_nc_n = b_1^2 + \cdots + b_{n-1}^2 + b_nc_n > 0,$$

y terminamos. El caso faltante es que todas las n-tuplas generen distintas $(n-1)$-tuplas. Entonces, a lo más una de ellas es la $(n-1)$-tupla cero, de modo que podemos usar la hipótesis de inducción sobre las $2n-1$ de ellas. Así, encontramos b y c tales que

$$(b_1c_1 + \cdots + b_{n-1}c_{n-1}) + b_nc_n > 0 + b_nc_n > 0.$$

Lo único que resta por demostrar es que en el paso inductivo podemos asumir que una de las tuplas es $a = (0, 0, \ldots, 0, -1)$. Fijemos una de las tuplas $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Sea φ un número real para el cual $\tan\varphi = \frac{x_1}{x_2}$. Cambiemos cada tupla $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (incluyendo x) por la tupla

$$(a_1\cos\varphi - a_2\operatorname{sen}\varphi, a_1\operatorname{sen}\varphi + a_2\cos\varphi, a_3, a_4, \ldots, a_n).$$

Un cálculo directo muestra que la primera coordenada de la tupla x se convierte en 0 y que todas las expresiones de la forma $a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$ se preservan. Podemos iterar este proceso hasta que todas las entradas de x, excepto la última, sean iguales a 0. Terminamos multiplicando todas las entradas en todas las tuplas por una constante adecuada que haga a la última entrada de x igual a -1. Esto preserva el signo de todas las expresiones de la forma $a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$. □
Ahora procederemos con la prueba de nuestra afirmación. Sea A un conjunto de tuplas no cero entre las cuales dos cualesquiera forman una pareja exquisita. Será suficiente demostrar que $|A| \leq n^2 + n$. Podemos escribir A como una unión disjunta de subconjuntos $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, donde A_i es el conjunto de tuplas en A cuya última entrada no cero aparece en la i-ésima posición. Demostraremos que $|A_i| \leq 2i$, de donde se seguirá nuestra demostración ya que $2 + 4 + \cdots + 2n = n^2 + n$.
Procederemos por contradicción, suponiendo que $|A_i| \geq 2i + 1$. Si A_i tiene 3 o más tuplas cuya única entrada no cero está en la i-ésima posición, entonces para cualesquiera dos de ellas, esta entrada tiene el mismo signo. Como las tuplas son distintas y sus entradas son enteros, esto produce dos tuplas para las cuales $|\sum a_ib_i| \geq 2$, lo que es una contradicción. Luego, hay a lo más dos de tales tuplas. A continuación las removemos de A_i. Ahora, para cada una de las restantes tuplas a, si tiene una i-ésima coordenada positiva, mantenemos a como es. Si tiene una i-ésima coordenada negativa, la reemplazamos con la *tupla opuesta* $-a$ con entradas de signo contrario. Esto no cambia la condición de las parejas exquisitas.
Después de hacer los cambios necesarios, tenemos dos casos. El primero es que haya dos tuplas a y b que tienen las primeras $i-1$ coordenadas iguales y por lo tanto,

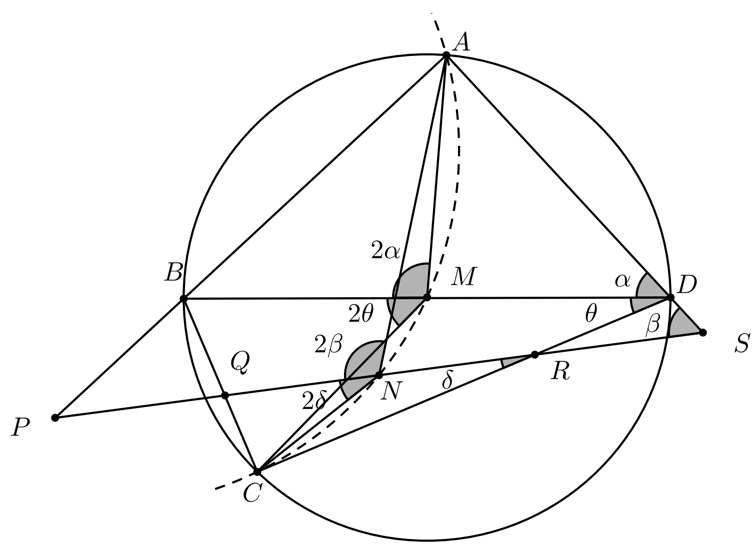
$$a_1b_1 + \cdots + a_{i-1}b_{i-1} = a_1^2 + \cdots + a_{i-1}^2 > 0,$$

en consecuencia es al menos 1 (pues las entradas son enteros). El segundo caso es que no haya dos tuplas con las primeras $i-1$ coordenadas iguales, pero entonces por el lema anterior encontramos dos tuplas a y b tales que $a_1b_1 + \cdots + a_{i-1}b_{i-1} \geq 1$. En cualquier caso, obtenemos que $a_1b_1 + \cdots + a_{i-1}b_{i-1} + a_ib_i \geq 2$. Esto contradice la hipótesis de pareja exquisita.

6ª Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas

A continuación presentamos las soluciones de la 6^a Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas.

Solución del problema 1. (Solución de Marcela Cruz Larios). Notemos que $\angle BAD + \angle BCD = 180°$, entonces $BADC$ es un cuadrilátero cíclico. Ya que $\angle BAD = 90°$, se tiene que BD es diámetro del circuncírculo del triángulo BAD; además por ser M el punto medio de BD, M es el centro de la circunferencia que pasa por A, B, C y D. Sean $\angle BDA = \alpha$ y $\angle CDB = \theta$, entonces por ángulos centrales $\angle BMA = 2\alpha$ y $\angle CMB = 2\theta$. Si N es punto medio de RQ, entonces $RN = NQ$ y por hipótesis $QP = SR$. Luego, $SN = SR + RN = QP + NQ = NP$ y, por lo tanto, N es punto medio de SP.



Los triángulos PAS y RCQ son rectángulos en A y C, respectivamente. Por lo tanto, PS y QR son diámetros de los circuncírculos de los triángulos PAS y RCQ, respectivamente. Además, como N es punto medio de PS y QR, se tiene que N es circuncentro de los triángulos PAS y RCQ. Sean $\angle PSA = \beta$ y $\angle CRQ = \delta$, entonces de nuevo por ángulos centrales se tiene que $\angle PNA = 2\beta$ y $\angle CNP = 2\delta$.

Ahora, $CAMN$ es cíclico si y solo si $\angle AMC = \angle ANC$. Para mostrar esto último notemos que $\angle AMC = \angle AMB + \angle BMC = 2\alpha + 2\theta$ y $\angle ANC = \angle ANP + \angle QNC = 2\beta + 2\delta$.
Lo anterior implica que $CAMN$ es cíclico si y solo si $\alpha+\theta = \beta+\delta$. Ya que $\angle QRC = \delta$, por ángulos opuestos por el vértice se tiene que $\angle DRS = \delta$. Por suma de ángulos en el triángulo RDS se tiene que $\angle DRS + \angle RSD + \angle SDR = 180°$, entonces

$$\delta + \beta = 180° - \angle SDR = \angle RDA = \angle CDA = \angle CDB + \angle BDA = \theta + \alpha,$$

que es lo que necesitamos demostrar.

Solución del problema 2. La respuesta es $k = 3$. Primero se demostrará que hay una función y una coloración para $k = 3$. Consideremos la función $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ dada por $f(n) = n$ para todo $n \equiv 1$ o 2 módulo 3 y $f(n) = 2n$ para $n \equiv 3$ módulo 3. Más aún, asignemos al entero positivo n el i-ésimo color si $n \equiv i \pmod 3$.
Por construcción, tenemos que $f(1 + 2) = 6 \neq 3 = f(1) + f(2)$ y, por tanto, f tiene la propiedad 2). Ahora, sean n y m enteros positivos con el mismo color i. Si $i = 0$, entonces $n+m$ tiene color 0, así que $f(n+m) = 2(n+m) = 2n+2m = f(n)+f(m)$. Si $i = 1$, entonces $n + m$ tiene color 2, así que $f(n + m) = n + m = f(n) + f(m)$. Por último, si $i = 2$, entonces $n + m$ tiene color 1, así que $f(n + m) = n + m = f(n) + f(m)$. Por lo tanto, f también satisface la condición 1).
Ahora, demostraremos que no hay una función y una coloración para $k = 2$. Consideremos alguna coloración de $\mathbb{Z}_{>0}$ con 2 colores y alguna función $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ que satisfaga las condiciones 1) y 2). Entonces, existen enteros positivos n y m tales que $f(n + m) \neq f(n) + f(m)$. Sean n y m de tal manera que su suma es la mínima entre las parejas (n, m) que cumplen la condición anterior y definamos $a = m + n$. Entonces, en particular, para cada $b < a$ se tenemos que $f(b) = bf(1)$ y $f(a) \neq af(1)$. Si a es par, entonces la condición 1) para $m = n = \frac{a}{2}$ implica que $f(a) = f\left(\frac{a}{2}\right) + f\left(\frac{a}{2}\right) = f(1)a$, una contradicción. Por lo tanto, a es impar. Se probarán dos lemas.

Lema 1. *Cualquier entero impar $b < a$ tiene un color diferente de a.*

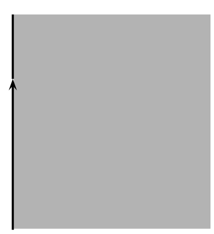
Demostración: Supongamos que $b < a$ es un entero impar y que a y b tienen el mismo color. Entonces, por un lado, $f(a + b) = f(a) + bf(1)$. Por otro lado, también tenemos que $f(a+b) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (a+b)f(1)$, al ser $\frac{a+b}{2}$ un entero positivo menor que a. Por tanto, $f(a) = f(a+b) - bf(1) = (a+b)f(1) - bf(1) = af(1)$, lo cual es una contradicción otra vez. En conclusión, todo entero impar menor que a tiene un color diferente del de a. $\square$

Lema 2. *Cualquier entero par $b < a$ tiene el mismo color de a.*

Demostración: Supongamos que $b < a$ es un entero par y que a y b tienen diferentes colores. Entonces, $a - b$ es un entero impar menor que a, así que tiene el mismo color de b. Por tanto, $f(a) = f(a-b) + f(b) = (a-b)f(1) + bf(1) = af(1)$, una contradicción. En conclusión, todo entero par menor que a tiene un color diferente del de a. $\square$

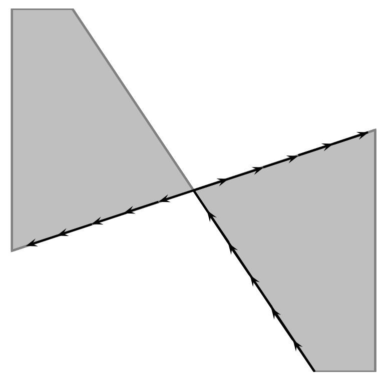
Supongamos que $a+1$ tiene el mismo color de a. Como $a > 1$, se tiene que $\frac{a+1}{2} < a$ y, por tanto, $f(a+1) = 2f\left(\frac{a+1}{2}\right) = (a+1)f(1)$. Ahora, $a-1$ es un entero par menor que a, por el lema 2 se sabe que $a-1$ también tiene el mismo color que a. Así, $2f(a) = f(2a) = f(a+1)+f(a-1) = (a+1)f(1)+(a-1)f(1) = 2af(1)$, lo cual implica que $f(a) = af(1)$, una contradicción. Por lo tanto, a y $a+1$ tienen colores diferentes.
Dado a que $a-2$ es un entero impar menor que a, por el lema 1 se sabe que tiene un color diferente del de a, así, $a-2$ y $a+1$ tienen el mismo color. Además, por el lema 2 se tiene que $a-1$ y a tienen el mismo color. Por tanto, $f(a)+f(a-1) = f(2a-1) = f(a+1)+f(a-2) = (a+1)f(1)+(a-2)f(1) = (2a-1)f(1)$, de lo que se sigue que $f(a) = (2a-1)f(1) - f(a-1) = (2a-1)f(1) - (a-1)f(1) = af(1)$, que es una contradicción. Por tanto, no existen dos enteros positivos n y m tales que $f(n+m) \neq f(n)+f(m)$.

Solución del problema 3. (Solución de Nuria Sydykova Méndez.) Primero probaremos por inducción que es posible colorear con 2 colores las regiones formadas por n rectas de modo que no haya dos del mismo color que compartan lado. Digamos que los colores son blanco y negro.
El caso base es de una recta, que forma dos semiplanos, uno blanco y uno negro. Para el paso inductivo, supongamos que tenemos n rectas que han dividido el plano en regiones y que se han coloreado como se pide. Al trazar una nueva recta, esta determina dos semiplanos y lo que haremos será intercambiar los colores de todas las regiones que quedan determinadas de un lado de la recta, mientras que dejaremos igual todas las del otro semiplano.
Esto funciona porque las regiones anteriores que fueron divididas por la recta, quedarán en dos colores a ambos lados de la recta, mientras que el patrón de colores invertido en las demás regiones (las que se cambiaron pero no fueron cortadas) no tiene regiones vecinas del mismo color (porque si lo hicieran, en el paso anterior también tendrían el mismo color aunque sería con el contrario, lo cual contradice la hipótesis de inducción).
Por tanto, siempre es posible colorear con dos colores las distintas regiones en del plano formadas pro n rectas, sin que haya dos vecinas con el mismo color.
Apliquemos ahora ese resultado en nuestro problema. Sin pérdida de generalidad, podemos decir que la hormiga inicia su recorrido teniendo una zona negra a su derecha (en caso de no ser así, invertimos todos los colores del plano y trabajamos en esta nueva coloración).

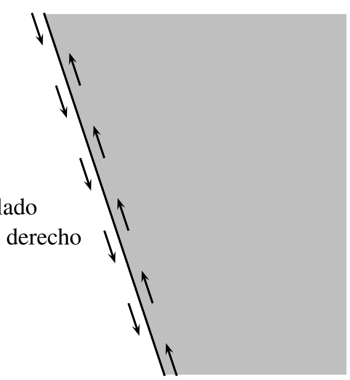


Inicio

Cuando llegue a una intersección (cruce de dos de las rectas) es necesario que haga un giro, ya sea hacia la izquierda o hacia la derecha, pero la siguiente figura muestra que en ambos casos, continúa teniendo una zona negra a su derecha.



Hemos demostrado que si la hormiga siempre gira en una intersección (tal y como pide el problema), tendrá siempre una zona negra a su derecha, por lo que es imposible que pase dos veces por un segmento en direcciones contrarias, pues ello significaría que en algún momento tuvo una región negra a su izquierda.



Solución del problema 4. (Solución de Cristina Irene Sotomayor Vivas). Consideremos una gráfica de $t_n + 1$ vértices que representan a las personas y donde cada arista representa una partida entre dos personas. De esta forma, el grado de cada vértice debe estar en el conjunto $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$. Como cada uno de esos valores aparece al menos una vez, la cantidad de aristas será mayor o igual a $\frac{t_1+t_2+\cdots+t_n}{2}$. Nuestro objetivo es demostrar que siempre se puede construir la gráfica.
Para $n = 1$ la gráfica existe para cualquier valor de t_1, basta considerar la gráfica completa en $t_1 + 1$ vértices[10].

[10]La gráfica completa en n vértices es una gráfica de n vértices, donde cada vértice es adyacente con cada uno de los restantes $n - 1$ vértices. Por ejemplo, la gráfica completa en 3 vértices es un triángulo.

Para $n = 2$, tomamos cualquier par de valores $t_1 < t_2$. Entonces, escogemos t_1 vértices de la gráfica y a cada uno de ellos le asignamos t_2 aristas (los unimos con todos los demás). Así, esos vértices tendrán grado t_2, mientras que los restantes tendrán grado t_1 (uno por cada vértice que escogimos inicialmente).
Para $n = 3$ tomamos los $t_3 + 1$ vértices, escogemos t_1 de ellos y trazamos t_3 aristas (los unimos con todos los demás) de modo que hay t_1 vértices con grado t_3 y t_3+1-t_1 vértices con grado t_1. Como debe haber al menos uno con grado t_1, separamos uno de estos últimos y nos fijamos en los $t_3 - t_1$ restantes. Debemos construir una subgráfica en la que alguno tenga grado $t_2 - t_1$ para que, al considerar la gráfica original, tenga grado $t_2 - t_1 + t_1 = t_2$. Más aún, como $t_3 - t_1 > t_2 - t_1$, entonces hay al menos $t_2 - t_1 + 1$ vértices en esta subgráfica, con los cuales construimos una gráfica completa y, por tanto, habrá vértices de grado $t_2 - t_1$.
Procedemos ahora por inducción, asumiendo que podemos construir una gráfica con las condiciones pedidas con $t_n + 1$ vértices y tomamos un $t_{n+1} > t_n$. A continuación, consideramos $t_{n+1} + 1$ vértices. Escogemos t_1 de ellos y los unimos con todos los demás, de modo que estos t_1 vértices tienen grado t_{n+1} mientras que los demás $t_{n+1} + 1 - t_1$ tienen grado t_1. De estos últimos seleccionamos uno y lo separamos, quedándonos con $t_{n+1} - t_1$ vértices.
Ahora, si denotamos por $s_k = t_k - t_1$, las condiciones del problema implican que $s_2 < s_3 < \cdots < s_n$. Por otro lado, $t_{n+1} - t_1 > t_n - t_1$ implica que $t_{n+1} - t_1 \geq t_n - t_1 + 1$, de modo que si escogemos $t_n - t_1 + 1$ puntos de los $t_{n+1} - t_1$ que tenemos, aplicamos la hipótesis de inducción para construir una subgráfica que cumpla las condiciones del problema, pero con grados s_k en vez de t_k. Luego, al agregar de vuelta los vértices que separamos tendremos una gráfica que satisface las condiciones del problema.

Solución del problema 5. a) Observemos que para enteros impares $n > 2$, la n-tupla $(1, 1, \ldots, 1)$ es costosa. Demostraremos que no hay n-tuplas costosas para n par.
Lema. *Si hay una n-tupla costosa para algún $n \geq 4$, entonces hay una $(n-2)$-tupla costosa.*
Prueba del lema. En lo que sigue todos los índices son considerados módulo n. Sea $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ una n-tupla costosa y sea a_t el mayor entero de la tupla. Tenemos las siguientes desigualdades

$$a_{t-1} + a_t \leq 2a_t < 2(a_t + a_{t+1}), \tag{32}$$

$$a_t + a_{t+1} \leq 2a_t < 2(a_{t-1} + a_t). \tag{33}$$

Como ambos números $a_{t-1} + a_t$ y $a_t + a_{t+1}$ son potencias de 2 (pues son divisores de una potencia de 2), de las relaciones (32) y (33) tenemos que

$$a_{t-1} + a_t = a_t + a_{t+1} = 2^r$$

para algún entero positivo r, y en particular, $a_{t-1} = a_{t+1}$.
Consideremos ahora la $(n-2)$-tupla $(b_1, \ldots, b_{n-2})$ que se obtiene al quitar a los números a_t y a_{t+1} de la n-tupla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Luego, obtenemos que

$$\prod_{i=1}^{n-2}(b_i + b_{i+1}) = \frac{\prod_{i=1}^{n}(a_i + a_{i+1})}{(a_{t-1} + a_t)(a_t + a_{t+1})} = 2^{2(k-r)-1},$$

de donde se sigue que la tupla $(b_1, \ldots, b_{n-2})$ es costosa. $\square$

Del lema anterior concluimos que si hay una n-tupla costosa para algún n par, entonces hay una 2-tupla costosa, esto es, $(a_1 + a_2)^2 = 2^{2k-1}$ para algunos enteros positivos a_1 y a_2, lo cual es imposible ya que el lado derecho de la igualdad no es un cuadrado.

b) Procederemos por inducción. En a) vimos que 1 pertenece a una n-tupla costosa. Supongamos que todos los enteros positivos impares menores que 2^k pertenecen a una n-tupla costosa, para algún $k \geq 1$. Entonces, para cualquier entero impar $r < 2^k$ hay un entero n y una n-tupla costosa $(a_1, \ldots, r, \ldots, a_n)$. Observemos entonces que también la tupla $(a_1, \ldots, r, 2^{k+1} - r, r, \ldots, a_n)$ es costosa. Como $2^{k+1} - r$ puede tomar todos los valores impares entre 2^k y 2^{k+1}, el paso inductivo está completo.

Solución del problema 6. Comenzamos la demostración con el siguiente lema.

Lema. *Sean ABC un triángulo, H su ortocentro y P un punto cualquiera. Si P_a, P_b y P_c son las reflexiones de P con respecto a los lados BC, CA y AB, respectivamente, entonces se cumple que*

1. *Existe un punto X_P sobre el circuncírculo del triángulo ABC que está sobre las reflexiones de la recta PH con respecto a los lados del triángulo ABC.*

2. *Los puntos A, P_b, P_c y X_P son concíclicos.*

Demostración. Sean D, E y F las intersecciones de AH, BH y CH con el circuncírculo del triángulo ABC. Sean Q y R las intersecciones de PH con los lados AB y AC, respectivamente. Es un hecho conocido que E y F son las reflexiones de H con respecto a AC y AB, respectivamente. Sean X y X' los segundos puntos de intersección de EP_b y FP_c con el circuncírculo del triángulo ABC. Por las reflexiones se tiene que

$$\begin{aligned}\angle(BE, EX) &= \angle(HE, EP_b) = \angle(PH, HE) = \angle(PH, HB) = \angle(FB, FP_c)\\ &= \angle(BF, FX'),\end{aligned}$$

lo cual implica que $X = X'$. De manera análoga se muestra que la reflexión de HP con respecto a BC pasa por X y a este punto lo nombramos X_P.

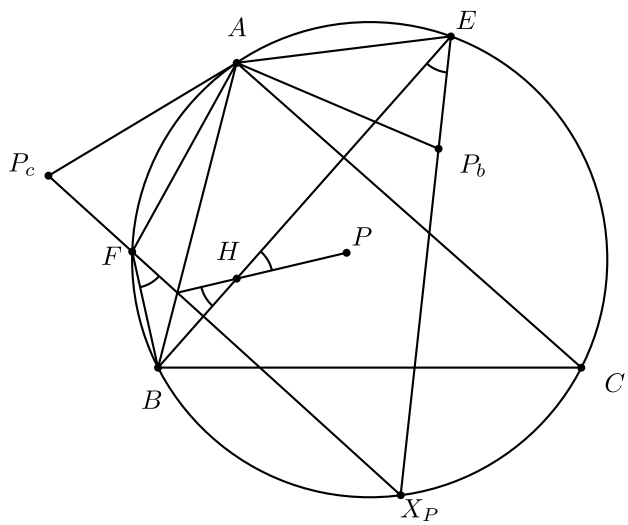
Para la segunda parte, notemos de nuevo por las reflexiones que

$$\begin{aligned}\angle(P_cA, AP_b) &= \angle(P_cA, AP) + \angle(AP, AP_b) = 2\angle(BA, AP) + 2\angle(PA, AC)\\ &= 2\angle(BA, AC)\end{aligned}$$

Análogamente, $\angle(FA, AE) = 2\angle(BA, AC)$, pero puesto que AFX_PE es cíclico se tiene que $\angle(FA, AE) = \angle(FX_P, X_PE)$. Por lo tanto,

$$\angle(P_cA, AP_b) = \angle(FX_P, X_PE) = \angle(P_cX_P, X_PP_b),$$

lo cual implica que $AP_cX_PP_b$ es un cuadrilátero cíclico, como se quería. $\square$



Regresando al problema notemos que por la segunda parte del lema anterior, los circuncírculos de los triángulos G_1G_2C, G_1G_3B y G_2G_3A pasan por el punto X_G y los circuncírculos de los triángulos O_1O_2C, O_1O_3B y O_2O_3A pasan por X_O. Por la primera parte del lema, X_G y X_O están sobre las reflexiones de las rectas GH y OH con respecto a los lados del triángulo; sin embargo, por la recta de Euler[11], las rectas GH y OH son iguales, lo cual implica que $X_G = X_O$. Por lo tanto, las siete circunferencias mencionadas en el problema pasan por un mismo punto.

[11] Ver en el apéndice el teorema 23.

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** *Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.*

Definición 2 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a-b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b \ (\textit{mod } m)$.*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c \ (\textit{mod } m)$ y $c \equiv d \ (\textit{mod } m)$, entonces $a \equiv d \ (\textit{mod } m)$.*
2. *Si $a \equiv c \ (\textit{mod } m)$ y $b \equiv d \ (\textit{mod } m)$, entonces $ab \equiv cd \ (\textit{mod } m)$.*
3. *Si $a \equiv c \ (\textit{mod } m)$, entonces $a^n \equiv c^n \ (\textit{mod } m)$ para todo entero positivo n.*
4. *Si $ab \equiv bc \ (\textit{mod } m)$, entonces $a \equiv c \ (\textit{mod } \frac{m}{(b,m)})$ donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 2 (Pequeño de Fermat)**.** *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \ (\textit{mod } p)$.*

Teorema 3 (Euler)**.** *Si a y n son enteros positivos primos relativos, entonces $a^{\phi(n)} \equiv 1 \ (\textit{mod } n)$.*

Teorema 4 (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k+1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 5 (Combinaciones)**.** *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 6 (Binomio)**.** *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 7 (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica)**.** *Si x_1, x_2, $\ldots$, x_n son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 8 (Suma de los ángulos internos de un triángulo)**.** *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 9 (Pitágoras)**.** *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 3 (Congruencia de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 4 (Semejanza de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA)**.** *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 10 (Tales)**.** *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 11 (Bisectriz)**.** *Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

Teorema 12 (Ley de senos)**.** *En un triángulo de lados a, b y c, se cumple la relación*

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R,$$

donde α es el ángulo opuesto al lado a, β es el ángulo opuesto al lado b, γ es el ángulo opuesto al lado c, y R es el radio de la circunferencia circunscrita del triángulo.

Teorema 13 (Ley de cosenos)**.** *En un triángulo de lados a, b y c, se cumple la relación*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

donde α es el ángulo opuesto al lado a.

Teorema 14 (Fórmula de Herón)**.** *El área de un triángulo de lados a, b y c y semi-perímetro $s = \frac{a+b+c}{2}$ es igual a*

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Teorema 15 (Ceva)**.** *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

Teorema 16 (Menelao)**.** *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y sólo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Definición 5 (Ángulos en la circunferencia)**.**

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*

2. *Ángulo semi-inscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*

3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

Teorema 17 (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

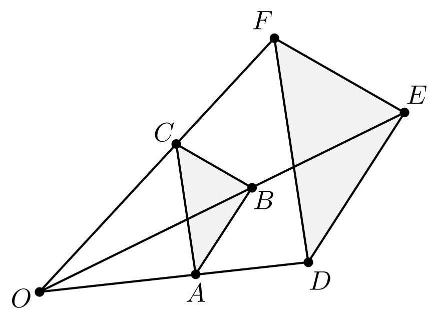
Teorema 18 (Medida del ángulo semi-inscrito)**.** *La medida de un ángulo semi-inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 19 (Potencia de un punto)**.**

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*

2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 6 (Triángulos homotéticos)**.** *Decimos que los triángulos ABC y DEF son homotéticos si $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ y $CA \parallel FD$. Dichos triángulos siempre son semejantes y la razón de homotecia es la razón de semejanza entre los triángulos. Si la razón de semejanza es diferente de 1, las rectas AD, BE y CF concurren en un punto O al que llamamos centro de homotecia.*



Teorema 20 (Circunferencia de los 9 puntos)**.** *Los pies de las tres alturas de un triángulo, los puntos medios de los tres lados y los puntos medios de los segmentos que van de los vértices al ortocentro del triángulo, están sobre una circunferencia de radio $\frac{1}{2}R$, donde R es el radio de la circunferencia circunscrita del triángulo.*

Definición 7 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 21 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, es decir,*

$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°.$$

Definición 8 (Figuras en perspectiva)**.** *Dos figuras están en perspectiva si todas las rectas que unen puntos correspondientes de las dos figuras son concurrentes. El punto por el cual pasan estas rectas se llama centro de perspectiva.*

Teorema 22 (Desargues)**.** *Dos triángulos están en perspectiva si y solo si los puntos de intersección de lados correspondientes son colineales.*

Teorema 23 (Recta de Euler)**.** *En un triángulo ABC, el ortocentro, el centroide y el circuncentro son colineales. La recta donde se encuentran estos puntos se conoce como la recta de Euler.*

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[7] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[8] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[10] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[11] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[14] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[16] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.