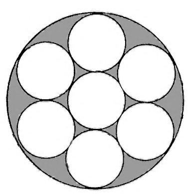
Proceso selectivo IMC 2019
Primer Examen Selectivo
Secundaria
Parte A

Nombre:

1. ¿Cuál es la suma de las raíces de la ecuación $(2x+3)(x-4)+(2x+3)(x-6)=0$
   R:

2. ¿Cuál es la medida en grados de un ángulo cuyo complemento es 25 % de su suplemento?
   R:

3. En la siguiente figura todos los círculos pequeños tienen radio 1.
   R:



4. ¿Para cuántos enteros positivos m existe al menos un entero positivo n tal que $mn \leq m+n$?
   R:

5. Ambas raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - 63x + k = 0$ son números primos.¿Cuántos valores posibles puede tomar k?
   R:

6. Dos números enteros positivos diferentes a y b difieren de sus respectivos recíprocos en 1. Entonces $a+b$ es:
   R:

7. Suponga que a y b son dígitos, no pueden ser ambos 9 y no pueden ser ambos cero. Considere el número decimal $0.\overline{ab}$ escrito como fracción simplificada. ¿Cuántos denominadores diferentes son posibles para esta fracción?
   R:

8. El triángulo ABC es rectángulo, con ángulo recto en C, $\angle B = 60°$ y $AB = 10$. Sea P un punto elegido al azar en el interior del triángulo ABC, se traza BP hasta cortar a AC en D. La probabilidad de que $BD > 5\sqrt{2}$ es:
   R:

9. Enel triángulo ABCel lado AC y la mediatriz de BC se intersecan en el punto D y BD es bisectriz del ángulo ABC. Si $AD = 9$ y $DC = 7$, ¿Cuál es el área del triángulo ABD?
   R:

10. Considere la secuencia: $4, 7, 1, 8, 9, 6, ...$ Para $n > 2$, el n-ésimo termino de la sucesión es el dígito de la unidades de la suma de los dos terminos anteriores. Si S_n denota la suma de los primeros n terminos de la sucesión, ¿cuál es el mínimo valor de n para el cual $S_n > 10000$
    R:

11. Ana elige dos números al azar del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y Carlos elige al azar uno de los números del conjunto $\{1, 2, ..., 10\}$. ¿Cuál es la probabilidad de que el número elegido por Carlos sea mayor que la suma de los números elegidos por Ana?
    R:

12. En cada casilla de un tablero de 4×4 se debe escribir un 1 o un 2, de tal forma que la suma de los números en cada fila y en cada columna sea un número primo. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?
    R:

Primer Examen Selectivo
Secundaria
Parte B

Nombre:

1. ¿De cuántas maneras puede obtenerse la suma de 100 centavos con monedas de denominaciones 1,2,10,20 o 50 centavos?

Nombre:

2. Determine la mayor potencia de 2 que divide a $(2^n)!$

Nombre:

3. Sean a, b, c, d números reales tales que $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ y $ac + bd = 0$. Determine el valor de $ab + cd$.

Proceso selectivo IMC 2019
Primer Examen Selectivo
Secundaria
Parte A

Nombre:

1. ¿Cuál es el valor de

$$(3x-2)(4x+1)-(3x-2)4x+1$$

   cuando $x=4$?
   R:

2. ¿Para cuántos enteros positivos n la expresión n^2-3n+2 es un número primo?
   R:

3. Encuentra el menor entero positivo n para el cual $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{n}$ es un entero.
   R:

4. El producto de tres enteros consecutivos es ocho veces su suma, ¿cuál es la suma de sus cuadrados?
   R:

5. ¿Cuántos números de tres dígitos distintos de cero cumplen que, no importa como se permuten sus dígitos, siempre queda un múltiplo de 4?
   R:

6. Suponga que a y b son dos números reales distintos de cero y que la ecuación $x^2+ax+b=0$ tiene soluciones a y b. Escribe todas las parejas (a,b).
   R:

7. ¿Para cuántos enteros n, $\frac{n}{20-n}$ es el cuadrado de un entero?
   R:

8. Un punto P se elige aleatoriamente de una región rectangular en el plano con vértices $(0,0),(2,0),(2,1)$ y $(0,1)$. ¿Cuál es la probabilidad de que P este más cerca del origen que del punto $(3,1)$?
   R:

9. Encuentra el valor de m que haga que $x - 3$ sea un factor de la expresión $4x^2 - 6x + m$,
   R:

10. Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en B. Sean M y N los puntos medios de AB y CB respectivamente. Dado que $AN = 19$ y $BM = 22$, entonces AB es igual a:
    R:

11. ¿Cuántos números de 5 cifras de la forma $\overline{37abc}$ existen tales que $\overline{37abc}, \overline{37bca}, \overline{37cab}$ sean todos múltiplos de 37?
    R:

12. En el triángulo ABC se tiene que $AB = 1$, $AC = 2$. El lado BC y la mediana desde A a BC tienen a misma longitud. ¿Cuánto mide BC
    R:

Primer Examen Selectivo
Secundaria
Parte B

Nombre:

1. Sea n un entero positivo. Probar que $a_1!a_2!...a_n! < k!$, donde k es un entero mayor que la suma de los enteros positivos $a_1, a_2, ..., a_n$.

Nombre:

2. Sea n un entero positivo y

$$A = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5... \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6... \cdot 2n}.$$

Probar que al menos un termino de la sucesión $A, 2A, 4A, 8A, ..., 2^k A, ...$ es un entero.

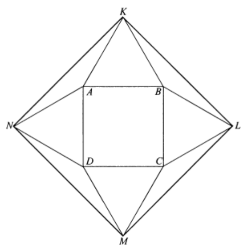
Nombre:

3. En el interior de un triángulo acutángulo ABC hay un punto P distinto del circuncentro. Probar que de entre los segmentos AP, BP, CP al menos uno es más largo y al menos uno es más corto que el circunradio.

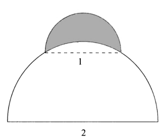
Proceso selectivo IMC 2019
Tercer Examen Selectivo
Secundaria
Parte A

Nombre:

1. En la figura $ABCD$ es un cuadrado y AKB, BLC, CMD, DNA son triángulos equiláteros. Si el área de $ABCD$ es 16, el área de $KLMN$ es:
   R:



2. Un semicírculo de radio 1 se coloca en lo alto de un semicírculo de radio 2 como se muestra en la figura, el área sombreada es llamada luna. ¿Cuál es el área de la luna?
   R:



3. En el cuadrado $ABCD$ de lado 4, M es el punto medio de CD. Un semicírculo de radio 2 y centro M intersecta al círculo de radio 4 y centro A en los puntos P y D. ¿Cuál es la distancia de P a AD?
   R:

residuo

4. Sean n un número de 5 dígitos, q y r el cociente y el reciduo, respectivamente, cuando n es dividido por 100. ¿Para cuántos valores de n es $q + r$ divisible por 11?
   R:

Cuántos espacios después de las comas

5. ¿Cuantos arreglos horizontales de 15 letras (5 As,5 Bs,5 Cs) cumplen que no tienen A en las primeras 5 letras, no tienen B en las posiciones $6, 7, 8, 9, 10$ y no tienen C en las últimas 5 posiciones?
   R:

6. El polinomio $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ tiene 5 raíces reales diferentes, una de ellas es $x = 0$. ¿Cuál de los coeficientes a, b, c, d, e no puede ser cero?
   R: Cuáles del polinomio,

7. ¿Cuántos cuadrados perfectos son divisores del producto $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot ... \cdot 9!$?
   R:
   término

8. El segundo termino de una progresión geométrica es 2 y el cuarto es 6, encuentra los posibles valores del primer termino de la progresión.
   R:

9. Si $s(n)$ denota la suma de los dígitos de n, por ejemplo $s(8) = 8, s(123) = 1 + +2 + 3 = 6$, ¿para cuántos números n de dos dígitos se tiene que $s(n) = 3$?
   R:

10. Sea f una función que cumple

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

y

$$f(kx) = kf(x)$$

Para cualesquiera reales x, y, k. Si se sabe que $f(6) - f(2) = 12$, encuentra el valor de $f(12) - f(2)$.
R:

11. ¿Cuál es el mayor entero que es divisior de

$$(n + 1)(n + 3)(n + 5)(n + 7)(n + 9)$$

para todos los enteros pares n?
R:

están

12. En el rectángulo $ABCD$, $AB = 5, BC = 3$. Los puntos F y G estan sobre el lado CD tal que $DF = 1$ y $GC = 2$. Las líneas AF y BG se intersectsn en E.
    intersectan
    ¿Cuál es el área del triángulo ABE?
    R:

Tercer Examen Selectivo
Secundaria
Parte B

Nombre:

1. Sea M el punto de intersección de las diagonales AC y BD del cuadrilátero convexo $ABCD$. La bisectriz del ángulo ACD corta al rayo BA en K. Si $MA \cdot MC + MA \cdot CD = MB \cdot MD$, probar que $\angle BKC = \angle CDB$

Falta un punto

Nombre:

2. Probar que $\{n\sqrt{3}\} > \frac{1}{n\sqrt{3}}$ para todo entero positivo n. Donde $\{x\}$ representa la parte decimal de x.

Nombre:

3. Un entero positivo m es llamado *creciente* si sus dígitos, leídos de izqierda a derecha, no decrecen. Probar que para cada n natural existe un número creciente m de n dígitos tal que m es un cuadrado perfecto.

Quinto Examen Selectivo

Diciembre 2019

Instrucciones:
→ Escribe tu nombre en el espacio indicado.
→ La Sección A consiste de 12 problemas, para los cuales solo se evaluará la respuesta. Cada uno de ellos tiene un valor de 5 puntos (no se otorgarán puntos parciales). Debes anotar la respuesta en el espacio indicado ya que, de lo contrario, se anulará tu respuesta.
→ La Sección B consiste de 3 problemas, para los cuales se evaluará el procedimiento que hagas. Cada uno tiene un valor de 20 puntos (se pueden otorgar puntos parciales).
→ No se permite el uso de apuntes, transportadores, calculadoras o dispositivos electrónicos.
→ Al final del examen, entrega estas hojas de problemas.
Tiempo máximo: 120 minutos.

Nombre: ______________________________

Sección A

Problema 1. Los números x, y son diferentes y cumplen que $x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y}$. Encuentra el valor de xy.

Respuesta: __________

Problema 2. ¿Cuántos números hay del 1 al 1000 que pueden escribirse de la forma a^b con $a, b \in \mathbb{Z}$?

Respuesta: __________

Problema 3. Se tienen dos números reales a, b tales que $0 < a < b < 1$. De los siguientes números,

$$a, b, \sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{ab},$$

¿cuál es el mayor?

Respuesta: __________

Problema 4. Denotemos por O al circuncentro de un triangulo acutángulo ABC. La línea perpendicular a OB y que pasa por O interseca a las líneas AB y BC en P y Q, respectivamente. También $AB = 5$, $BC = 4$ y $BQ = \frac{9}{2}$. Si $BP = \frac{m}{n}$, donde m y n son enteros positivos y primos relativos, encontrar el valor de $m + n$.

Respuesta: __________

Problema 5. Se escriben en una lista todos los números de tres cifras cuya suma de cifras sea 8 en orden creciente. ¿Qué número o números quedan en medio?

Respuesta: __________

Problema 6. ¿Cuántas soluciones reales distintas tiene la ecuación $((x^2 - 2)^2 - 5)^2 = 1$?

Respuesta: __________

Problema 7. Sea ω_C una circunferencia con centro en C, de radio 2 y uno de sus diámetros es AB. Otra circunferencia ω_D con centro D es tangente a ω_C en A. Sea ω_E una circunferencia tangente externamente a ω_D, tangente internamente a ω_C y tangente a AB. Si el radio de ω_D mide el triple que el radio de ω_E, ¿cuánto mide el radio de ω_D?

Respuesta: __________

Problema 8. Decimos que un número es *tridente* si es suma de tres potencias de dos distintas. Se escriben los números tridentes de menor a mayor. ¿Cuál ocupa la posición número 100?

Respuesta: ____________

Problema 9. Resuelve el sistema de ecuaciones en los números enteros:

$$\begin{aligned} x^{x+y} &= y^{24} \\ y^{x+y} &= x^{6}. \end{aligned}$$

Respuesta: ____________

Problema 10. Un encuestador se dirige a una casa en donde es atendido por una señora y tienen el siguiente diálogo.

¿Cuántos hijos tiene usted señora y qué edades tienen? Pregunta el encuestador. La señora responde: *Tengo tres hijas. Si multiplicas sus edades obtienes 36 y si las sumas el resultado es igual al número de mi casa que puede ver usted aquí.* El encuestador se queda pensando y luego le dice: *Me falta información, señora.* Ella le dice finalmente: *Tiene usted razón. A la mayor de mis hijas le gusta el chocolate.*

¿Cuáles son las edades de las hijas de la señora?

Respuesta: ____________

Problema 11. En un círculo, hay n ($n > 3$) enteros cuya suma de 94 tal que cada número es igual al valor absoluto de la diferencia de los dos números siguientes en el sentido de las manecillas del reloj. ¿Cuál es el valor de n?

Respuesta: ____________

Problema 12. Considera un conjunto V de 10 puntos en el plano de forma que no hay tres de ellos alineados. Un conjunto T de triángulos se llama *soluno* si todos los vértices de los triángulos de T pertenecen al conjunto V y no existen dos triángulos en el conjunto que compartan más de un vértice. ¿Cuál es la máxima cantidad de triángulos que puede contener un conjunto soluno?

Respuesta: ____________

Sección B

Problema 13. Demuestre que si una progresión aritmética de enteros contiene un cuadrado perfecto y la diferencia de la progresión es no negativa, entonces contiene una infinidad de cuadrados perfectos.

Problema 14. Sean a, b y c números reales tales que cumplen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} a+b+c &\neq 0 \\ a^3+b^3+c^3 &= 36 \\ abc &= 12. \end{aligned}$$

Encuentra el valor de $(a+b)(b+c)(c+a)$.

Problema 15. Sea $\triangle ABC$ tal que $\angle ABC = 100°$ y $\angle BCA = 62°$. Sobre los lados AB y AC se toman los puntos M y N tales que $\angle MCB = 52°$ y $\angle NBC = 80°$. Obtenga la medida de $\angle CMN$.

Sexto Examen Selectivo

Diciembre 2019

Instrucciones:

→ Escribe tu nombre en el espacio indicado.

→ La Sección A consiste de 12 problemas, para los cuales solo se evaluará la respuesta. Cada uno de ellos tiene un valor de 5 puntos (no se otorgarán puntos parciales). Debes anotar la respuesta en el espacio indicado ya que, de lo contrario, se anulará tu respuesta.

→ La Sección B consiste de 3 problemas, para los cuales se evaluará el procedimiento que hagas. Cada uno tiene un valor de 20 puntos (se pueden otorgar puntos parciales).

→ No se permite el uso de apuntes, transportadores, calculadoras o dispositivos electrónicos.

→ Al final del examen, entrega estas hojas de problemas.

Tiempo máximo: 120 minutos.

Nombre: ____________________

Sección A

Problema 1. Calcula el valor de $a - b$ si a y b son enteros con $a \neq b$, $a \neq 0$ y $b \neq 0$ que cumplen que

$$\frac{a - 2015}{b} + \frac{b + 2015}{a} = 2.$$

Respuesta: ____________

Problema 2. Determina si el número $2^{2014} + 1007^4$ es un número primo o no.

Respuesta: ____________

Problema 3. ¿Cuál es el menor entero positivo n tal que la fracción $\frac{2839+n}{4520+n}$ puede ser reducida?

Respuesta: ____________

Problema 4. ¿Cuántos números enteros positivos n menores que 1000 cumplen que $\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor$ divide a n?

Respuesta: ____________

Problema 5. La fracción $\frac{p}{q}$ es irreducible. Su expansión decimal es de la forma $0.ababab\cdots$. Los dígitos a y b pueden ser iguales, pero los dos no pueden ser cero. Determina cuántos valores diferentes puede tomar p.

Respuesta: ____________

Problema 6. Sea $ABCD$ un cuadrado de lado 29. Los puntos E y F están fuera del cuadrado y cumplen que $BE = DF = 20$ y que $AE = CF = 21$. Si $EF = a\sqrt{b}$, con a y b enteros positivos y b no es divisible por el cuadrado de un entero mayor que 1, ¿cuánto vale ab?

Respuesta: ____________

Problema 7. Sea X un conjunto de números primos que cumple que todos los números primos de un dígito están en X. Además, si $p \in X$, entonces también están en X el número que result de quitarle el primer dígito a p y el número que resulta de quitarle el último dígito a p. ¿Cuál es la máxima cantidad de elementos que puede tener X?

Respuesta: ____________

Problema 8. ¿Cuántas ternas de enteros positivos (x, y, z) satisfacen $xyz = 3^{2014}$ y $x \leq y \leq z \leq x + y$?

Respuesta: ____________

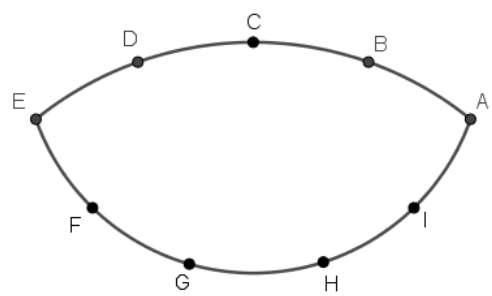
Problema 9. Un refugio de animales consiste de 5 jaulas en una fila, marcadas de izquierda a derecha como en la figura.

Rojo Lobo	Plata León	Café Zorro	Blanco Vaca	Gris Caballo

Hay un animal en cada jaula. Los 5 animales son, de hecho, un lobo, un león, un zorro, una vaca y un caballo, y sus colores son, de hecho, rojo, plata, café, blanco y gris. Sin embargo, ninguna de las marcas corresponde a los animales (por ejemplo, el lobo no es rojo y el león no es plateado). Más aún, ningún animal está en o adyacente a la jaula que corresponde a su tipo o su color. Si el caballo no está en la jaula de en medio, ¿cuál es el color del caballo?

Respuesta: ____________

Problema 10. En la siguiente figura,



los puntos A, B, C, D y E están igual espaciados en un arco menor de una circunferencia. Los puntos E, F, G, H, I y A están igual espaciados en un arco menor de una segunda circunferencia con centro en C. Si $\angle ABD = \angle AHG + 12°$, encontrar la medida de $\angle BAG$.

Respuesta: ____________

Problema 11. Encuentra todos los números enteros positivos n que tienen exactamente 16 divisores positivos, digamos $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_{16} = n$, tales que $d_6 = 18$ y $d_9 - d_8 = 17$.

Respuesta: ____________

Problema 12. Dado un entero positivo $n \geq 2$, considera n islas acomodadas en un círculo. Entre cualesquiera dos islas vecinas se construyen dos puentes.
Empezando en una isla dada, ¿de cuántas maneras se pueden recorrer los $2n$ puentes de forma que ningún puente sea utilizado más de una vez?

Respuesta: ____________

Sección B

Problema 13. Sea $\triangle ABC$ con ángulo reco en B. Sean D el pie de la altura desde B hasta AC, E el punto medio de DC y F un punto sobre la recta AB tal que $AB = AF$. Demuestra que $BE \perp FD$.

Problema 14. Una cuadrícula de 6×6 cuadritos se recortará en rectángulos, los cortes se harán siguiendo las líneas de la cuadrícula.

a) Da un ejemplo donde la cuadrícula se pueda dividir en ocho rectángulos diferentes.

b) Muestra que no es posible hacer una división de la cuadrícula en nueve rectángulos diferentes.

NOTA: *los rectángulos de tamaño* 2×1 *y de* 1×2 *se consideran iguales, mientras que los rectángulos de tamaño* 2×3 *y de* 1×6 *se consideran diferentes.*

Problema 15. Sea n un entero positivo fijo. Encuentre la suma de todos los enteros positivos m que cumplen que existe una elección de signos en la siguiente expresión

$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots \pm (4n+1)$$

tal que el resultado obtenido sea m.

Proceso IMC 2019-2020
Séptimo Examen Selectivo

Febrero 2020

Instrucciones:
→ Escribe tu nombre en el espacio indicado.
→ La Sección A consiste de 12 problemas, para los cuales solo se evaluará la respuesta. Cada uno de ellos tiene un valor de 1 punto (no se otorgarán puntos parciales). Debes anotar la respuesta en el espacio indicado ya que, de lo contrario, se anulará tu respuesta.
→ La Sección B consiste de 3 problemas, para los cuales se evaluará el procedimiento que hagas. Cada uno tiene un valor de 4 puntos (se pueden otorgar puntos parciales).
→ No se permite el uso de apuntes, transportadores, calculadoras o dispositivos electrónicos.
→ Al final del examen, entrega estas hojas de problemas.
Tiempo máximo: 120 minutos.

Nombre: ______________________________

Sección A

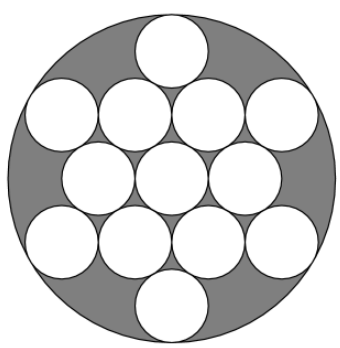
Problema 1. Los enteros x, y satisfacen que $x > y > 0$ y que $x + y + xy = 80$. ¿Cuánto vale x?

Respuesta: ____________

Problema 2. Sea S el conjunto de los enteros positivos n que satisfacen que $\frac{1}{n}$ tiene representación decimal periódica $0.ababab\cdots$, con a y b dígitos diferentes. ¿Cuál es la suma de los elementos de S?

Respuesta: ____________

Problema 3. En la siguiente figura, se tienen 13 círculos de radio 1 dentro de una circunferencia más grande. Todas las intersecciones son puntos de tangencia. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



Respuesta: ____________

Problema 4. Sea $f(x) = x^2(1-x)^2$. Encuentra el valor de la siguiente suma:

$$f\left(\frac{1}{2019}\right) - f\left(\frac{2}{2019}\right) + f\left(\frac{3}{2019}\right) - f\left(\frac{4}{2019}\right) + \cdots + f\left(\frac{2017}{2019}\right) - f\left(\frac{2018}{2019}\right).$$

Respuesta: ____________

Problema 5. Considérese el número

$$N = 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99\cdots99}_{321 \text{ dígitos}}.$$

Encuentra la suma de dígitos de N.

Respuesta: ____________

Problema 6. ¿De cuántas maneras se pueden pintar cada uno de los enteros 2, 3, 4, …, 9 de rojo, verde o azul, de manera que cada número esté pintado de un color distinto a cada uno de los colores con los que están pintados sus divisores propios?
NOTA: *Los divisores propios de un número son aquellos divisores que son distintos al número mismo. Ejemplo: los divisores propios de 28 son 1, 2, 4, 7 y 14.*

Respuesta: ____________

Problema 7. Sean ω y γ circunferencias concéntricas en O de radios 20 y 17, respectivamente. El triángulo equilátero ABC, cuyo interior está dentro de ω pero fuera de γ, tiene al vértice A sobre ω, y la recta que contiene al lado BC es tangente a γ. Los segmentos AO y BC se intersectan en P, y $\frac{BP}{CP} = 3$. Encuentra AB.

Respuesta: ____________

Problema 8. Determina el valor de la suma

$$\left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^3}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{2^{1000}}{3} \right\rfloor.$$

Respuesta: ____________

Problema 9. Encuentra el valor de la expresión

$$\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{2019^2} + \frac{1}{2020^2}}.$$

Respuesta: ____________

Problema 10. Los puntos C y D están del mismo lado respecto a la recta AB de tal manera que los triángulos ABC y BAD son congruentes con $AB = 9$, $BC = AD = 10$ y $AC = BD = 17$. Sea X la intersección de AC y BD. Encuentra el área del triángulo ABX.

Respuesta: ____________

Problema 11. Determina todos los valores de a tales que el valor absoluto de una de las raíces de la ecuación

$$x^2 + (a-2)x - 2a^2 + 5a - 3 = 0$$

sea igual a dos veces el valor absoluto de la otra raíz.

Respuesta: ____________

Problema 12. Lupita va a poner seis torres en un tablero de ajedrez de 6×6 donde tanto las filas como las columnas están etiquetadas del 1 al 6. Las torres se colocan de tal manera que no haya dos en la misma fila o en la misma columna. El *valor* de una casilla es la suma del número de fila en la que está y el número de columna en la que está. La *puntuación* de un acomodo de torres es el valor de la casilla con menor valor entre las que están ocupadas por torres. Encuentra el promedio de todas las puntuaciones obtenidas a partir de acomodos de torres.

Respuesta: ____________

Sección B

Problema 13. Denotamos por $h(n)$ a la suma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. Demuestra que para $n \geq 2$, se tiene que

$$n + h(1) + h(2) + h(3) + \cdots + h(n-1) = nh(n).$$

Problema 14. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que $\angle CAD = 10°$, $\angle BAC = 70°$, $\angle CBD = 20°$ y $\angle DBA = 60°$. Encuentra la medida, en grados, del ángulo $\angle DCA$.

Problema 15. Sean N un entero mayor que 1 y x el menor entero positivo con la siguiente propiedad: existe un entero positivo k estrictamente menor que $x-1$ tal que $N+k$ es múltiplo de x. Prueba que x es de la forma p^n o $2p$ para algún p primo y n natural.

Proceso IMC 2019-2020
Octavo Examen Selectivo

Febrero 2020

Instrucciones:
→ Escribe tu nombre en el espacio indicado.
→ La Sección A consiste de 12 problemas, para los cuales solo se evaluará la respuesta. Cada uno de ellos tiene un valor de 1 punto (no se otorgarán puntos parciales). Debes anotar la respuesta en el espacio indicado ya que, de lo contrario, se anulará tu respuesta.
→ La Sección B consiste de 3 problemas, para los cuales se evaluará el procedimiento que hagas. Cada uno tiene un valor de 4 puntos (se pueden otorgar puntos parciales).
→ No se permite el uso de apuntes, transportadores, calculadoras o dispositivos electrónicos.
→ Al final del examen, entrega estas hojas de problemas.
Tiempo máximo: 120 minutos.

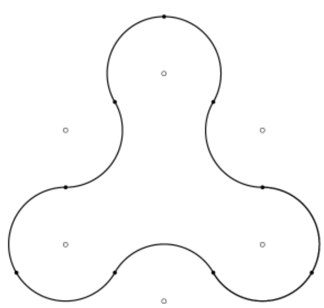
Nombre: ____________________

Sección A

Problema 1. Sean x, y números reales tales que $x + \frac{2}{x} = y + \frac{2}{y}$. Encuentra el valor de xy.

Respuesta: ____________

Problema 2. La curva cerrada que se muestra en la figura está compuesta por nueve arcos de circunferencia congruentes, cada uno mide $\frac{2\pi}{3}$, y los centros de las circunferencias correspondientes son los vértices de un hexágono regular de lado 2. ¿Cuál es el área de la región encerrada por la curva?



Respuesta: ____________

Problema 3. Encuentra un número primo que divida al número $9999999 + 1999000$.

Respuesta: ____________

Problema 4. Sea $ABCD$ un trapecio con bases AB y CD. Se sabe que $BC = 2DA$ y que $\angle BAD + \angle CBA = 120°$. Encuentra la medida, en grados, del ángulo $\angle BAD$.

Respuesta: ____________

Problema 5. Hugo y Lalo juegan al siguiente juego. Se elige un número entero entre 0 y 999, inclusive, y se le da a Hugo. Siempre que Hugo recibe un número, lo duplica y el resultado se lo da a Lalo. Siempre que Lalo recibe un número, le suma 50 y el resultado se lo da a Hugo. El ganador es el último jugador que diga un número menor a 1000. Sea N el menor número inicial con el que Hugo gana al final del juego. Encuentra la suma de dígitos de N.

Respuesta: ____________

Problema 6. Se define la sucesión de números $\{a_n\}_{n\geq 1}$ como sigue: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{3}{7}$, y para $n \geq 3$,

$$a_n = \frac{a_{n-2} \cdot a_{n-1}}{2a_{n-2} - a_{n-1}}.$$

Encuentra a_{2020}.

Respuesta: ____________

Problema 7. Sea ABC un triángulo tal que $AB = 10$, $BC = 17$ y $AC = 21$. Se dibuja una semicircunferencia con diámetro sobre AC tal que esta sea tangente a AB y BC. Encuentra el radio de la semicircunferencia.

Respuesta: ____________

Problema 8. Sean x, y, z números tales que

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 9 \\ xyz &= -4. \end{aligned}$$

Además, se sabe que $x + y + z \in \mathbb{Z}$. Encuentra el valor de $4[(xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2] - 3(2xyz - 1)^2$.

Respuesta: ____________

Problema 9. Encuentra todos los enteros positivos n que satisfacen que el valor de la siguiente expresión

$$\sqrt{\frac{25}{2} + \sqrt{\frac{625}{4} - n}} + \sqrt{\frac{25}{2} - \sqrt{\frac{625}{4} - n}}$$

es un número entero.

Respuesta: ____________

Problema 10. El candado de Uge se abre con una combinación de tres dígitos del 0 al 9, pero como a él no le gustan los 4's, la clave de su candado no tiene 4's. Más aún, ni siquiera quiere que dos de los dígitos de su clave sumen 4. ¿Cuántas posibles combinaciones tiene Uge para elegir la clave de su candado?

Respuesta: ____________

Problema 11. Encuentra todas las soluciones reales a la ecuación

$$(x^2 - 2x + 2)^2 - 2(x^2 - 2x + 2) + 2 - x = 0.$$

Respuesta: ____________

Problema 12. Encuentra la cantidad de números de cuatro dígitos que tienen dos dígitos pares, dos dígitos impares y cumplen lo siguiente: al multiplicar el número por 2, se obtiene un número de cuatro dígitos con todos sus dígitos pares; y al dividir el número entre 2, se obtiene un número natural de cuatro dígitos con todos sus dígitos impares.

Respuesta: ____________

Sección B

Problema 13. A cada uno de los vértices de un polígono de $2n$ lados se le asigna un número entero de manera que los números asignados a vértices adyacentes difieran en 1. Llamemos *lomas* a los vértices cuyo número es mayor que los números de sus dos vértices adyacentes. Llamemos *valles* a aquellos vértices con un número menor que los de sus dos vértices adyacentes. Sea S_l la suma de los números de las lomas y S_v la suma de los números de los valles. Demuestra que $S_l - S_v = n$.

Problema 14. Sean a, b, c números reales distintos tales que las ecuaciones $x^2 + ax + 1 = 0$ y $x^2 + bx + c = 0$ poseen exactamente una raíz real común, así como las ecuaciones $x^2 + x + a = 0$ y $x^2 + cx + b = 0$ poseen exactamente una raíz real común. Encuentra todos los posibles valores de $a + b + c$.

Problema 15. En un triángulo acutángulo ABC, sean Q y P los pies de alturas desde B y C hasta AC y AB, respectivamente. La recta PQ intersecta al circuncírculo del triángulo ABC en X y Y, con P entre X y Q. Supóngase que $XP = 10$, $PQ = 25$ y $QY = 15$. Encuentra el valor de $AB \cdot AC$.