1^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Nacional

Jalapa, Veracruz, 1987

Primer día

1. Demuestre que si dos fracciones son irreducibles (simplificadas) y su suma es un entero, entonces ambas fracciones tienen el mismo denominador.

2. ¿Cuántos enteros positivos dividen a 20! ($20! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 19 \times 20$)?

3. Cosidere dos rectas l y l' y un punto fijo P que diste lo mismo de l que de l'. ¿Qué lugar geométrico describen los puntos M que son proyección de P sobre AB, donde A está en l, B está en l', y el ángulo APB es recto?

4. Calcule el producto de todos los enteros positivos menores que 100, y que tengan exactamente tres divisores positivos. Compruebe que dicho número es un cuadrado perfecto.

Segundo día

5. Considere un triángulo rectángulo ABC donde la hipotenusa es BC. M es un punto en BC y P y Q las proyecciones de M en AB y AC, respectivamente. Pruebe que para ninguno de tales puntos M son iguales las áreas del triángulo BPM, del triángulo MQC y el rectángulo $AQMP$ (las tres al mismo tiempo).

6. Demuestre que para cualquier entero positivo n, el número $(n^3 - n)(5^{8n+4} + 3^{4n+2})$ es múltiplo de 3804.

7. Demuestre que si n es un entero positivo, entonces

$$\frac{n^2 + n - 1}{n^2 + 2n}$$

es una fracción irreducible (simplificada).

8. (a) Tres rectas en el espacio l, m, n concurren en el punto S y un plano perpendicular a m corta a l, m y n en A, B y C, respectivamente. Suponga que los ángulos ASB y BSC son de 45° y que el ángulo ABC es recto. Calcule el ángulo ASC.

   (b) Si un plano perpendicular a l corta a l, m y n en P, Q y R, respectivamente y si $SP = 1$, calcule los lados del triángulo PQR.