2^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Nacional

Hermosillo, Sonora, 1988

Primer día

1. ¿De cuántas formas se pueden acomodar en línea recta siete pelotas blancas y cinco negras, de tal manera que no estén dos pelotas negras juntas?

2. Si a y b son enteros positivos, pruebe que 19 divide a $11a + 2b$ si y solo si 19 divide a $18a + 5b$.

3. Considere dos circunferencias tangentes exteriormente y de radios distintos. Sus tangentes comunes forman un triángulo. Calcule el área de dicho triángulo en términos de los radios de las circunferencias.

4. ¿Cuántas maneras hay de escoger ocho enteros a_1, a_2,..., a_8 no necesariamente distintos, tales que $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_8 \leq 8$?

Segundo día

5. Si a y b son dos enteros positivos primos relativos y n es un entero, pruebe que el máximo común divisor de $a^2 + b^2 - nab$ y $a + b$ divide a $n + 2$.

6. Considere dos puntos fijos B y C de una circunferencia $\mathcal{C}$. Encuentre el lugar geométrico de las intersecciones de las bisectrices de los triángulos ABC, cuando A es un punto que recorre $\mathcal{C}$.

7. Si A y B son subconjuntos ajenos del conjunto $\{1, 2, \ldots, m-1, m\}$ y la suma de los elementos de A es igual a la suma de los elementos de B, pruebe que el número de elementos de A y también de B es menor que $\frac{m}{\sqrt{2}}$.

8. Calcule el volumen del octaedro que circumscribe a una esfera de radio 1.