5^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Nacional

Oaxtepec, Morelos, 1991

Primer día

1. Calcule la suma de todas las fracciones positivas irreducibles (simplificadas) menores que uno cuyo denominador es 1991.

2. Una compañía de n soldados es tal que

   (1) n es un número capicúa (es decir, se lee de la misma manera al derecho y al revés, por ejemplo 12321 o 523325),

   (2) Si los soldados se forman

      (i) de 3 en 3, quedan 2 soldados en la última fila,

      (ii) de 4 en 4, quedan 3 soldados en la última fila y,

      (iii) de 5 en 5, quedan 5 soldados en la última fila.

   (a) ¿Cuál es el mínimo número n tal que satisface (1) y (2)?

   (b) Demuestre que hay una infinidad de números n que satisfacen (1) y (2).

3. Se tienen cuatro canicas de radio uno colocadas en el espacio de tal manera que cada una de ellas es tangente a las otras 3. ¿Cuál es el radio de la menor esfera que contiene a las canicas?

Segundo día

4. Considere un cuadrilátero convexo $ABCD$ en el que las diagonales AC y BD se cortan formando un ángulo recto. Sean M, N, R y S los puntos medios de los segmentos AB, BC, CD y AD, respectivamente. Sean W, X, Y y Z las proyecciones de los puntos M, N, R y S sobre las rectas DC, AD, AB y BC, respectivamente. Pruebe que todos los puntos M, N, R, S, W, X, Y y Z están sobre una misma circunferencia.

5. La suma de los cuadrados de dos números consecutivos puede ser un cuadrado perfecto, por ejemplo $3^2 + 4^2 = 5^2$.

   (a) Pruebe que la suma de los cuadrados de m enteros consecutivos no puede ser un cuadrado para $m = 3$ y 6.

   (b) Encuentre un ejemplo de 11 números positivos consecutivos cuya suma de cuadrados sea un cuadrado perfecto.

6. En un polígono de n lados ($n \geq 4$) se considera una familia T de triángulos formados con los vértices del polígono con la propiedad de que cada dos triángulos de la famila cumplen una de las siguientes dos condiciones:

   (a) no tienen vértices en común,

   (b) tienen 2 vértices en común.

   Demuestra que T tiene a lo más n triángulos.