6^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Nacional

La Trinidad, Tlaxcala, 1992

Primer día

1. Un tetraedro $OPQR$ es tal que los ángulos POQ, POR y QOR son rectos. Muestre que si X, Y, Z son los puntos medios de PQ, QR y RP, entonces el tetraedro $OXYZ$ tiene sus cuatro caras iguales.

2. Sea p un número primo, diga cuántas cuartetas distintas (a, b, c, d) existen, con a, b, c y d enteros y $0 \leq a$, b, c, $d \leq p - 1$, tales que $ad - bc$ sea múltiplo de p.

3. Se tienen cuatro canicas de radio uno colocadas en el espacio de tal manera que cada una de ellas es tangente a las otras 3. ¿Cuál es el radio de la menor esfera que contiene a las canicas?

Segundo día

4. Muestre que 100 divide a $1^1 + 11^{11} + 111^{111} + \cdots + 1111111111^{1111111111}$.

5. Sean x, y, z números reales positivos tales que $x+y+z = 3$. Si $S = \sqrt{2x+3} + \sqrt{2y+3} + \sqrt{2z+3}$, pruebe que $6 < S \leq 3\sqrt{5}$.

6. Sea $ABCD$ un rectángulo. Sean I el punto medio de CD y M la intersección de BI con la diagonal AC.

   (a) Pruebe que DM pasa por el punto medio de BC.

   (b) Sea E un punto exterior al rectángulo tal que ABE sea un triángulo isósceles y rectángulo en E. Además, suponga que $BC = BE = a$. Pruebe que ME es bisectriz del ángulo AMB.

   (c) Calcule el área del cuadrilátero $AEBM$ en función de a.