7^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Nacional

Acapulco, Guerrero, 1993

Primer día

1. Sea ABC un triángulo rectángulo en A. Se construyen exteriormente a este triángulo los triángulos rectángulos isósceles AEC y ADB con hipotenusas AC y AB, respectivamente. Sea O el punto medio de BC y sean E' y D' los puntos de intersección de OE y OD con DB y EC, respectivamente. Calcule el área del cuadrilátero $DED'E'$ en función de los lados del triángulo ABC.

2. Encuentre los números del 100 al 999 tales que la suma de los cubos de sus dígitos sea igual al número.

3. Dentro de un pentágono de área 1993 se encuentran 995 puntos. Considere esos puntos junto con los vértices del pentágono. Muestre que de todos los triángulos que se pueden formar con los 1000 puntos anteriores, hay al menos uno de área menor o igual a uno.

Segundo día

4. Para cualquier número entero $n \geq 0$, se define:

   (I) $f(n,0) = 1$ y $f(n,n) = 1$,

   (II) $f(n,k) = f(n-1,k-1) + f(n-1,k)$, para $0 < k < n$.

   ¿Cuántos cálculos se tienen que hacer para encontrar $f(3991, 1993)$, sin contar aquellos de la forma $f(n,0)$ y $f(n,n)$?

5. Por un punto O de una circunferencia, se tienen tres cuerdas que sirven como diámetros de tres circunferencias. Además del punto común O, las circunferencias se intersectan por parejas en otros tres puntos. Demuestra que tales puntos son colineales.

6. Sean $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)+1$ y p un número impar. Pruebe que existe un entero n tal que p divide a $f(n)$ si y solo si existe un entero m tal que p divide a $m^2 - 5$.