10^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Nacional

Mérida, Yucatán, 1996
Primer día

1. Sea $ABCD$ un cuadrilátero y sean P y Q los puntos de trisección de la diagonal BD (es decir, P y Q son puntos del segmento BD para los cuales las longitudes BP, PQ y QD son todas iguales). Sea E la intersección de la recta que pasa por A y P con el segmento BC y sea F la intersección de la recta que pasa por A y Q con el segmento DC. Demuestre lo siguiente:

   (I) Si $ABCD$ es un paralelogramo, entonces E y F son los respectivos puntos medios de los segmentos BC y CD.

   (II) Si E y F son los respectivos puntos medios de los segmentos BC y CD, entonces $ABCD$ es un paralelogramo.

2. Bordeando una mesa circular hay dibujadas 64 casillas y en cada una hay una ficha. Las fichas y las casillas están numeradas del 1 al 64 en orden consecutivo (cada ficha está en la casilla el mismo número). En la parte central de la mesa hay 1996 focos apagados. Cada minuto todas las fichas se desplazan simultáneamente, en forma circular (en el mismo sentido de la numeración), como sigue: la ficha #1 se desplaza una casilla, la ficha #2 se desplaza dos casillas, la ficha #3 se desplaza tres casillas, etcétera, pudiendo varias fichas ocupar la misma posición. Cada vez que una ficha comparte casilla con la ficha #1, se prende uno de los focos (se prenden tantos focos como fichas estén compartiendo la posición de la ficha #1 en ese momento). ¿En dónde estará la ficha #1 en el primer momento en que ya todos los focos estén prendidos?

3. Demuestre que no es posible cubrir la cuadrícula de 6 cm. $\times$ 6 cm. con 18 rectángulos de 2 cm. $\times$ 1 cm. de tal manera que cada una de las rectas de longitud 6 cm. que forman la cuadrícula y que están en el interior de la misma pase por uno de los rectángulos. Demuestre también que sí es posible cubrir una cuadrícula de 6 cm. $\times$ 5 cm. con 15 rectángulos de 2 cm. $\times$ 1 cm. de tal manera que cada una de las rectas de 5 cm. o 6 cm. que forman la cuadrícula y que están en el interior de la misma pase por el centro de por lo menos uno de los rectángulos.

Segundo día

4. ¿Para qué enteros $n \geq 2$ se pueden acomodar los números del 1 al 16 en los cuadros de una cuadrícula de 4×4 (un número en cada cuadro, sin repetir los números) de tal manera que las 8 sumas de los números que quedan en cada fila y en cada columna sean múltiplos de n, y que estos 8 múltiplos sean todos distintos entre sí?

5. En una cuadrícula de $n \times n$ se escriben los números del 1 al n^2 en el orden habitual, de izquierda a derecha y de arriba a abajo, como ejemplo se ilustra el caso $n = 3$:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Llamemos camino en la cuadrícula a una sucesión de pasos de un cuadro a otro desde el cuadro 1 hasta el n^2, de tal manera que en cada paso el movimiento sea hacia la derecha o hacia abajo. Si C es un camino, denotamos por $L(C)$ a la suma de los números por los que pasa el camino C.

(i) Sea M la mayor $L(C)$ que se puede obtener de entre todos los caminos C en una cuadrícula fija de tamaño $n \times n$ y sea m la menor $L(C)$ (también de entre todos los caminos C en una cuadrícula fija de tamaño $n \times n$). Pruebe que $M - m$ es un cubo perfecto.

(ii) Pruebe que en ninguna cuadrícula hay un camino tal que $L(C) = 1996$.

6. En la figura se muestra un triángulo acutángulo ABC en el que la longitud de AB es menor que la de BC y la de BC es menor que la de AC. Los puntos A', B' y C' son tales que AA' es perpendicular a BC, y la longitud de AA' es igual a la de BC; BB' es perpendicular a AC, y la longitud de BB' es igual a la de AC; CC' es perpendicular a AB, y la longitud de CC' es igual a la de AB. Además el ángulo $AC'B$ es igual a 90°. Demuestre que A', B' y C' son colineales.