11^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Nacional

Monterrey, Nuevo León, 1997
Primer día

1. Encuentre todos los números primos positivos p tales que $8p^4 - 3003$ también sea un primo positivo.

2. En un triángulo ABC, sean P y P' puntos sobre el segmento BC, Q en el segmento CA y R sobre el AB de forma que: $\frac{AR}{RB} = \frac{BP}{PC} = \frac{CQ}{QA} = \frac{CP'}{P'B}$. Sea G el centroide del triángulo ABC y sea K el punto de intersección de las rectas AP' y RQ. Demuestre que los puntos P, G y K son colineales.

3. En una cuadrícula de 4×4 se van a colocar los números enteros del 1 al 16 (uno en cada casilla).

   (I) Pruebe que es posible colocarlos de manera que los números que aparecen en cuadrados que comparten un lado tengan una diferencia menor o igual a 4.

   (II) Pruebe que no es posible colocarlos de tal manera que los números que aparecen en cuadros que comparten un lado tengan una diferencia menor o igual a 3.

Segundo día

4. Dados 3 puntos no alineados en el espacio, al único plano que los contiene le llamamos plano determinado por los puntos. ¿Cuál es el mínimo número de planos determinados por 6 puntos en el espacio si no hay 3 alineados y no están los 6 en un mismo plano?

5. Sean P, Q y R puntos sobre los lados de un triángulo ABC con P en el segmento BC, Q en el segmento AC y R en el segmento BA, de tal manera que si A' es la intersección de BQ con CR , B' es la intersección de AP con CR, y C' es la intersección de AP con BQ, entonces $AB' = B'C'$, $BC' = C'A'$ y $CA' = A'B'$. Calcule el cociente del área del triángulo PQR entre el área del triángulo ABC.

6. Pruebe que el número 1 se puede escribir de una infinidad de maneras distintas en la forma: $\frac{1}{5} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$, donde n, a_1, a_2,..., a_n son enteros positivos y $5 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.