

17^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Nacional

Guanajuato, Guanajuato, 2003
Primer día

1. Dado un número k de dos o más cifras, se forma otro entero m insertando un cero entre la cifra de las unidades y la de las decenas de k . Encuentra todos los números k para los cuales m resulta ser un múltiplo de k .
2. Sean A , B y C tres puntos colineales con B entre A y C . Sea \mathcal{Y} una circunferencia tangente a AC en B , y sean \mathcal{X} y \mathcal{Z} las circunferencias de diámetros AB y BC , respectivamente. Sea P el otro punto (además de B) en el que se cortan las circunferencias \mathcal{X} y \mathcal{Y} ; sea Q el otro punto (además de B) en el que se cortan las circunferencias \mathcal{Y} y \mathcal{Z} . Supón que la recta PQ corta a \mathcal{X} en un punto R distinto de P , y que esa misma recta PQ corta a \mathcal{Z} en un punto S distinto de Q . Demuestra que concurren AR , CS y la tangente común a \mathcal{X} y \mathcal{Z} por B .
3. En una fiesta hay el mismo número n de muchachos que de muchachas. Supón que a cada muchacha le gustan a muchachos y que a cada muchacho le gustan b muchachas. ¿Para qué valores de a y b es correcto afirmar que forzosamente hay un muchacho y una muchacha que se gustan mutuamente?

Segundo día

4. Sea $ABCD$ un trapecio con AB paralelo a DC . Se toman puntos P y Q sobre AB y CD respectivamente, tales que $\frac{AP}{PB} = \frac{DQ}{QC}$. Sea M la intersección de AQ con DP y sea N la intersección de PC con QB . Pruebe que la longitud de MN depende sólo de las longitudes de AB y DC , y calcula su valor.
5. Se escriben en tarjetas todas las parejas de enteros (a, b) con $1 \leq a < b \leq 2003$. Dos personas juegan con las tarjetas como sigue: cada jugador en su turno elige (a, b) (que se retira del juego) y escribe el producto $a \cdot b$ en un pizarrón (ambos jugadores usan el mismo pizarrón). Pierde el jugador que ocasione que el máximo común divisor de los números escritos hasta ese momento sea 1. ¿Quién tiene estrategia ganadora? (Es decir, ¿cuál de los dos jugadores puede inventar un método con el cual asegura su triunfo?).
6. Dado un entero n un *cambio sensato* consiste en sustituir n por $2n + 1$ ó $3n + 2$. Dos enteros positivos a y b se llaman *compatibles* si existe un entero que se puede obtener haciendo uno o más cambios sensatos, tanto a partir de a , como a partir de b . Encuentra todos los enteros positivos compatibles con 2003 menores que 2003.