

18^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Nacional

Ixtapan de la Sal, Estado de México, 2004
Primer día

1. Encuentra todos los números primos p, q y r con $p < q < r$, que cumplan con $25pq + r = 2004$ y que $pqr + 1$ sea un cuadrado perfecto.
2. ¿Cuál es la mayor cantidad de enteros positivos que se pueden encontrar de manera que cualesquiera dos de ellos a y b (con $a \neq b$) cumplan que,

$$|a - b| \geq \frac{ab}{100} ?$$

3. Sean Z y Y los puntos de tangencia del incírculo del triángulo ABC con los lados AB y CA , respectivamente. La paralela a YZ por el punto medio M del lado de BC , corta a CA en N . Sea L el punto sobre CA tal que $NL = AB$ (y L del mismo lado de N que A). La recta ML corta a AB en K . Muestra que $KA = NC$.

Segundo día

4. Al final de un torneo de fútbol en el que cada par de equipos jugaron entre sí exactamente una vez y donde no hubo empates, se observó que para cualesquiera tres equipos A, B y C , si A le ganó a B y B le ganó a C entonces A le ganó a C .
Cada equipo calculó la diferencia (positiva) entre el número de partidos que ganó y el número de partidos que perdió. La suma de todas estas diferencias resultó ser 5000. ¿Cuántos equipos participaron en el torneo? Encuentra todas las respuestas posibles.
5. Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos circunferencias tales que el centro O de \mathcal{B} esté sobre \mathcal{A} . Sean C y D los dos puntos de intersección de las circunferencias. Se toman un punto A sobre \mathcal{A} y un punto B sobre \mathcal{B} tales que AC es tangente a \mathcal{B} en C y BC es tangente a \mathcal{A} en el mismo punto C . El segmento AB corta de nuevo a \mathcal{B} en E y ese mismo segmento corta de nuevo a \mathcal{A} en F . La recta CE vuelve a cortar a \mathcal{A} en G y la recta CF corta a la recta GD en H . Prueba que el punto de intersección de GO y EH es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo DEF .
6. ¿Cuál es el mayor número posible de cambios de dirección en un recorrido sobre las líneas de una cuadrícula de 2004×2004 casillas, si el recorrido no pasa dos veces por el mismo lugar?