21^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Nacional

Saltillo, Coahuila, 2007

Primer día

1. Encuentra todos los enteros positivos N con la siguiente propiedad: entre todos los divisores positivos de N hay 10 números consecutivos pero no 11.

2. Dado un triángulo equilátero ABC, encuentra todos los puntos P del plano donde se halla ABC que cumplan $\angle APB = \angle BPC$.

3. Sean a, b, c números reales positivos que satisfacen $a + b + c = 1$, muestra que

$$\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ca} + \sqrt{c+ab} \leq 2.$$

Segundo día

4. Para un entero positivo n se definen n_1 como la suma de dígitos de n, n_2 como la suma de dígitos de n_1, y n_3 como la suma de dígitos de n_2. Por ejemplo, para $n = 199$, $n_1 = 199_1 = 19$, $n_2 = 199_2 = 10$ y $n_3 = 199_3 = 1$. Encuentra todas las parejas de enteros positivos (m, n) tales que

$$\begin{aligned} m + n &= 2007, \\ m_3 + n_3 &= 2007_3. \end{aligned}$$

5. En cada cuadrado de una cuadrícula de 6×6 hay una luciérnaga apagada o encendida. Una movida es escoger tres cuadrados consecutivos ya sean los tres verticales o los tres horizontales, y cambiar de estado a las tres luciérnagas que se encuentran en dichos cuadrados. Cambiar de estado a una luciérnaga significa que si está apagada se enciende y viceversa.

   Muestra que si inicialmente hay una luciérnaga encendida y las demás apagadas, no es posible hacer una serie de movidas tales que al final todas las luciérnagas estén apagadas.

6. Sea ABC un triángulo tal que $AB > AC > BC$. Sea D un punto sobre el lado AB de tal manera que $CD = BC$, y sea M el punto medio del lado AC. Muestra que $BD = AC$ si y sólo si $\angle BAC = 2\angle ABM$.