23^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Nacional

Campeche, Campeche, 2009

Primer día

1. Sea ABC un triángulo y AD la altura sobre el lado BC. Tomando a D como centro y a AD como radio, se traza una circunferencia que corta a la recta AB en P, y corta a la recta AC en Q. Muestra que el triángulo AQP es semejante al triángulo ABC.

2. En cajas marcadas con los números 0, 1, 2,... se van a colocar todos los enteros positivos de acuerdo con las siguientes reglas:

   - Si p es un número primo, este se coloca en la caja con el número 1.
   - Si el número a se coloca en la caja con el número m_a y b se coloca en la caja con el número m_b, entonces el producto de a y b, es decir ab, se coloca en la caja con el número $am_b + bm_a$.

   Encuentra todos los enteros positivos n que cuando se coloquen queden en la caja con el número n.

3. Sean a, b, c números reales positivos tales que $abc = 1$. Muestra que

$$\frac{a^3}{a^3+2} + \frac{b^3}{b^3+2} + \frac{c^3}{c^3+2} \geq 1 \text{ y que } \frac{1}{a^3+2} + \frac{1}{b^3+2} + \frac{1}{c^3+2} \leq 1.$$

Segundo día

4. Sea $n > 1$ un entero impar y sean a_1, a_2,..., a_n números reales distintos. Sea M el mayor de estos números y sea m el menor de ellos. Muestra que es posible escoger los signos en la expresión $s = \pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n$ de manera que

$$m < s < M.$$

5. Considera un triángulo ABC y un punto M sobre el lado BC. Sea P la intersección de las perpendiculares a AB por M y a BC por B, y sea Q la intersección de las perpendiculares a AC por M y a BC por C. Muestra que PQ es perpendicular a AM si y solo si M es el punto medio de BC.

6. En una fiesta con n personas, se sabe que de entre cualesquiera 4 personas, hay 3 de las 4 que se conocen entre sí o hay 3 que no se conocen entre sí. Muestra que las n personas se pueden separar en dos salones de manera que en un salón todos se conocen entre sí y en el otro no hay dos personas que se conozcan entre sí.

   Nota. Conocerse se considera una relación mutua.