24^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Nacional

Ensenada, Baja California, 2010
Primer día

1. Encuentra todas las ternas de números naturales (a, b, c) que cumplan la ecuación $abc = a + b + c + 1$.

2. En cada casilla de un tablero de $n \times n$ hay un foco. Inicialmente todos los focos están apagados. En un paso, se permite cambiar el estado de todos los focos en una fila o de todos los focos en una columna (los focos prendidos se apagan y los focos apagados se prenden).

   Muestra que si después de cierta cantidad de pasos hay uno o más focos prendidos entonces en ese momento hay al menos n focos prendidos.

3. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos circunferencias tangentes exteriormente en un punto A. Se traza una recta tangente a $\mathcal{C}_1$ en B y secante a $\mathcal{C}_2$ en C y D; luego se prolonga el segmento AB hasta intersecar a $\mathcal{C}_2$ en un punto E. Sea F el punto medio del arco CD sobre $\mathcal{C}_2$ que no contiene a E y sea H la intersección de BF con $\mathcal{C}_2$. Muestra que CD, AF y EH son concurrentes.

Segundo día

4. Sea n un entero positivo. En una cuadrícula de $n \times 4$, cada renglón es igual a

2	0	1	0

   Un *cambio* es tomar tres casillas

   a) consecutivas en el mismo renglón y
   b) con dígitos distintos escritos en ellas

   y cambiar los tres dígitos de estas casillas de la siguiente manera

   $$0 \to 1, \quad 1 \to 2, \quad 2 \to 0.$$

   Por ejemplo, un renglón $\boxed{2}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}$ puede cambiarse al renglón $\boxed{0}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{0}$ pero no al renglón $\boxed{2}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}$ pues 0, 1 y 0 no son distintos entre sí.

   Los cambios se pueden aplicar cuantas veces se quiera, aún a renglones ya cambiados. Muestra que para $n < 12$ no es posible hacer un número finito de cambios de forma que la suma de los números en cada una de las cuatro columnas sea la misma.

5. Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB \neq AC$, M el punto medio de BC y H el ortocentro de ABC. La circunferencia que pasa por B, H y C corta a la mediana AM en N. Muestra que $\angle ANH = 90°$.

6. Sean p, q, r números primos positivos distintos. Muestra que si pqr divide a

$$(pq)^r + (qr)^p + (rp)^q - 1$$

entonces $(pqr)^3$ divide a

$$3((pq)^r + (qr)^p + (rp)^q - 1).$$