25^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Nacional

San Luis Potosí, San Luis Potosí, 2011

Primer día

1. Se tienen 25 focos distribuidos de la siguiente manera: los primeros 24 se disponen en una circunferencia colocando un foco en cada uno de los vértices de un 24-ágono regular, y el foco restante se coloca en el centro de dicha circunferencia.

   Se permite aplicar cualquiera de las siguientes dos operaciones:

   - Tomar dos vértices sobre la circunferencia tales que hay una cantidad impar de vértices en los arcos que definen, y cambiar el estado de los focos de estos dos vértices, así como del foco del centro.
   - Tomar tres vértices sobre la circunferencia que formen un triángulo equilátero, y cambiar el estado de los focos en estos tres vértices, así como del foco del centro.

   Muestra que partiendo de cualquier configuración inicial de focos encendidos y apagados, siempre es posible llegar a una configuración en la que todos los focos están encendidos.

2. Sea ABC un triángulo acutángulo con vértices sobre una circunferencia Γ. Sea l la recta tangente a Γ en A. Sean D y E los puntos de intersección de la recta l y del segmento AC con la circunferencia de centro B y radio BA, respectivamente. Muestra que DE pasa por el ortocentro del triángulo ABC.

   Nota: El ortocentro de un triángulo es el punto donde concurren las tres alturas del triángulo.

3. Sea n un entero positivo. Encuentra todas las soluciones $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de números reales que satisfacen el siguiente sistema de n ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_1 - 1 &= a_2 \\ a_2^2 + a_2 - 1 &= a_3 \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\ a_{n-1}^2 + a_{n-1} - 1 &= a_n \\ a_n^2 + a_n - 1 &= a_1. \end{aligned}$$

Segundo día

4. Encuentra el menor entero positivo tal que al escribirlo en notación decimal utiliza exactamente dos dígitos distintos y que es divisible entre los números del 1 al 9.

   Nota: un ejemplo de un número que al escribirlo en notación decimal utiliza exactamente dos dígitos distintos es el 1121211222.

5. Considera un tablero de $(2^n - 1) \times (2^n + 1)$ casillas que se quiere dividir en rectángulos de tal forma que los lados de los rectángulos sean paralelos a los lados del tablero, de tal forma que el área (cantidad de casillas) de cada rectángulo sea una potencia de 2. Encuentra la menor cantidad de rectángulos en las que se puede dividir el tablero.

6. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos circunferencias que se cortan en los puntos A y B. Consideremos un punto C sobre la recta AB de modo que B queda entre A y C. Sean P y Q puntos sobre $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, respectivamente, tales que que CP es tangente a $\mathcal{C}_1$, CQ es tangente a $\mathcal{C}_2$, P no está dentro de $\mathcal{C}_2$ y Q no está dentro de $\mathcal{C}_1$. La recta PQ corta de nuevo a $\mathcal{C}_1$ en R y a $\mathcal{C}_2$ en S, ambos puntos distintos de B. Supongamos que CR corta de nuevo a $\mathcal{C}_1$ en X y CS corta de nuevo a $\mathcal{C}_2$ en Y. Sea Z un punto sobre la recta XY. Muestra que SZ es paralela a QX si y sólo si PZ es paralela a RX.