28^a **Olimpiada Mexicana de Matemáticas**

Concurso Nacional

Toluca, Estado de México, 2014

Primer día

1. Cada uno de los números del 1 al 4027 se ha coloreado de verde o de rojo. Cambiar el color de un número es pasarlo a verde si era rojo, y pasarlo a rojo si era verde.

   Diremos que dos enteros positivos m y n son cuates si alguno de los números $\frac{m}{n}$ o $\frac{n}{m}$ es un número primo. Un *paso* consiste en elegir dos números que sean cuates y cambiar el color de cada uno de los números.

   Muestra que después de realizar algunos pasos es posible hacer que todos los números del 1 al 2014 sean verdes.

2. Un entero positivo *a se reduce* a un entero positivo b, si al dividir a entre su dígito de las unidades se obtiene b. Por ejemplo, 2015 se reduce a $\frac{2015}{5} = 403$.

   Encuentra todos los enteros positivos que, mediante algunas reducciones, llegan al número 1. Por ejemplo, el número 12 es uno de tales enteros pues 12 se reduce a 6 y 6 se reduce a 1.

3. Sean Γ_1 una circunferencia y P un punto fuera de Γ_1. Las tangentes desde P a Γ_1 tocan a la circunferencia en los puntos A y B. Considera M el punto medio del segmento PA y Γ_2 la circunferencia que pasa por los puntos P, A y B. La recta BM intersecta de nuevo a Γ_2 en el punto C, la recta CA intersecta de nuevo a Γ_1 en el punto D, el segmento DB intersecta de nuevo a Γ_2 en el punto E y la recta PE intersecta a Γ_1 en el punto F (con E entre P y F).

   Muestra que las rectas AF, BP y CE concurren.

Segundo día

4. Sea $ABCD$ un rectángulo con diagonales AC y BD. Sean E el punto de intersección de la bisectriz del ángulo $\angle CAD$ con el segmento CD, F el punto sobre el segmento CD tal que E es el punto medio de DF y G el punto sobre la recta BC tal que $BG = AC$ (con C entre B y G).

   Muestra que la circunferencia que pasa por D, F y G es tangente BG.

5. Sean a, b y c números reales positivos tales que $a+b+c=3$. Muestra que

$$\frac{a^2}{a+\sqrt[3]{bc}}+\frac{b^2}{b+\sqrt[3]{ca}}+\frac{c^2}{c+\sqrt[3]{ab}}\geq\frac{3}{2},$$

y determina para que números a, b y c se alcanza la igualdad.

6. Para cada entero positivo n, sea $d(n)$ la cantidad de divisores positivos de n. Por ejemplo, los divisores positivos de 6 son 1, 2, 3 y 6, por lo que $d(6)=4$.

   Encuentra todos los enteros positivos n tales que

$$n+d(n)=d(n)^2.$$