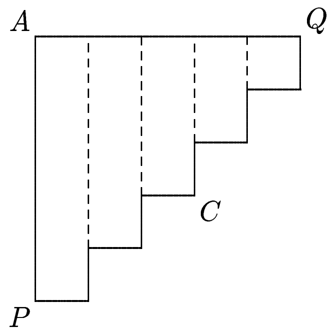
Soluciones del Examen Canguro Matemático 2001

1. Cada vez que tomo un dulce de la canasta izquierda tomo uno de la canasta del centro al siguiente paso. Lo mismo es cierto para la canasta derecha. Voy a tomar 11 dulces, para ese momento habré tomado 5 dulces de una canasta lateral y 6 de otra. Así, la canasta con más dulces tendrá 6 dulces.

2. La región sombreada consiste de dos partes que encajan en un círculo de radio 2. Así, su área es 4π.

3. El camino de P a Q que pasa por A es igual de largo que el camino que pasa por C ya que en este último el total de las longitudes horizontales es el mismo que la longitud de AQ (como se muestra en la figura); y de la misma manera, el total de longitudes verticales de es el mismo que la longitud PA. Así tenemos que el camino que pasa por C es 215 m más largo que el que pasa por B.



4. Como el producto de b por c es c, tenemos que $b = 1$. Entonces $a \cdot b \cdot c = a \cdot 2 = 12$ y $a = 6$.

5. Tenemos que $\angle OND + \angle ONA = 180^o$; como $\angle OND = 60^o$, entonces $\angle OND = 120^o$. Por otro lado, AC es diagonal del cuadrado, así que $\angle CAN = 45^o$. Entonces, $\angle NOA = 180^o - \angle NAO - \angle ONA = 180^o - 120^o - 45^o = 15^o$.

6. El primer reloj tarda 27 minutos para que caiga toda la arena que contiene, así que el segundo reloj tiene $\frac{1}{3}$ de la arena que tiene el primero, es decir, $9\,\mathrm{cm}^3$.

7. En la primera ronda, Ana tomó de la primera mesa $\frac{2001}{3} = 667$ frijoles, mientras que Beto tomó 400, ya que $\frac{2001}{5} = 400.2$, pero Ana y Beto siempre recogen frijoles completos. Como en la primera mesa quedaron 1334 frijoles y $\frac{1334}{5} = 266.8$, Ana tomó 266 frijoles mientras que Beto tomó 533 (el mayor entero menor a $\frac{1600}{3}$). En las dos rondas Ana y Beto recogieron la misma cantidad de frijoles: $667 + 266 = 400 + 533 = 933$.

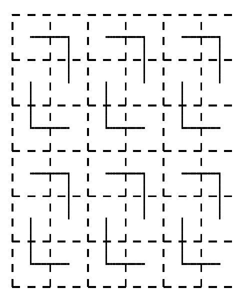
8. Es fácil ver que si nos fijamos en la posición de la tarjeta número 1 necesitaremos 9 movimientos para que esta tarjeta regrese a su lugar original. Es claro que lo mismo sucede para el resto de las tarjetas.

9. Como el triángulo ABC y el triángulo BCD tienen la misma base y la misma altura, entonces también tienen la misma área. Así, área$(ABCD) =$ área$(ABD) +$ área$(BCD) =$ área$(ADB) +$ área(ACB). Entonces tenemos que $\frac{\text{área}(ABCD)}{\text{área}(ACB)} = \frac{\text{área}(ADB)}{\text{área}(ACB)} + \frac{\text{área}(ACB)}{\text{área}(ACB)} = \frac{\text{área}(ADB)}{\text{área}(ACB)} + 1 = 3$, de donde $\frac{\text{área}(ADB)}{\text{área}(ACB)} = 2$.

10. Considerando los 6 dados exteriores antes de pegarlos, el total de puntos en sus superficies es $6(1+2+3+4+5+6) = 126$. A esta cantidad hay que restarle la suma de los puntos en la superficie del dado que quedará al centro (cada uno de los dados de afuera se pega por el mismo número al dado central), que es $1+2+3+4+5+6 = 21$. Así, la cantidad de puntos que quedaron en la superficie es $126 - 21 = 105$.

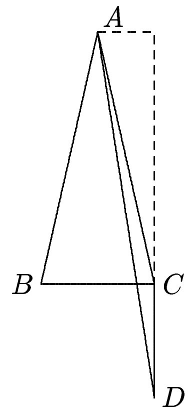
11. Los 32 nudos están en los vértices de un pedazo rectangular de red de $m \times n$ cuadritos donde $m \times n = 32$. Como el perímetro de la toda la red tiene 28 corchos, sabemos que $2m+2n+4 = 28$, de donde $m+n = 12$. El total de hoyitos de toda la red es $(m+1)(n+1)$. Como $32 = 1 \times 32 = 2 \times 16 = 4 \times 8$ y m y n son ambos menores que 12, entonces m y n deben ser 8 y 4. Así, el total de hoyitos es $(8+1)(4+1) = 45$.

12. Si podemos construir un cuadrado con k piezas, entonces $3k$ debe ser un cuadrado: $k = 3n^2$, para algún entero n. Para $n = 1$ tenemos $k = 3$, y es fácil ver que no se pueden acomodar tres piezas para formar un cuadrado. Con $n = 2$ tenemos $k = 12$, y podemos formar un cuadrado como el que se muestra.



13. Sea a la edad del menor y $2a$ la del mayor. Tenemos que $1664 = 13 \times 2^6$. Observemos que a no puede ser un múltiplo de 13 porque entonces 1664 sería un múltiplo de $13 \times 26 = 338$. De aquí sabemos que existe un hermano mediano cuya edad es múltiplo de 13, y que la edad del menor y del mayor son potencias de 2. Claramente a no puede ser 2 ni 4. Si el hijo menor tiene 8 años y el mayor tiene 16, debe haber otro hermano en medio que tenga 13 años. No hay otra posibilidad.

14. El triángulo ABC es isósceles y la distancia de A a CD es $\frac{BC}{2} = \frac{3}{2}$ porque BC es perpendicular a CD. Así, el área del triángulo ACD es igual a $\frac{1}{2}\frac{CD \times 3}{2} = \frac{9}{4}$.



15. Imaginemos que las cajas están todas vacías y que vamos metiéndolas en orden. Al principio tenemos 11 cajas grandes vacías. Si decidiéramos llenar alguna de estas cajas tendríamos una caja vacía menos, pero habría 8 cajas vacías más (las que se van a meter en esa caja grande); entonces al final de esta operación tendríamos 1 caja llena y 7 cajas vacías más. Con las cajas medianas pasa lo mismo: por cada caja llena se agregan 7 vacías. El número de cajas vacías debe ser $11 + 7k$ donde k es el número de cajas que se llenaron. Como $102 = 11 + 7 \times 13$, sólo tenemos cajas se llenan 13 cajas, así que en total tenemos $102 + 13 = 115$ cajas.