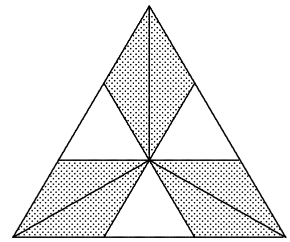
**Soluciones del Examen Eliminatorio Estatal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas 2013**

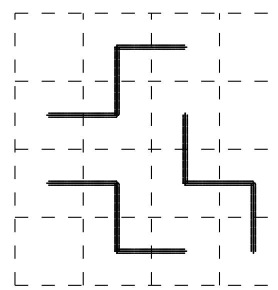
1. **(a)** Estarán encendidas las que se prendieron entre 15 y 55 minutos, es decir, 4 velas.

2. **(d)** Llamemos $O$ al punto de intersección de las líneas y unamos $O$ con los vértices del triángulo. Así el triángulo queda partido en 9 triángulos de igual área (pues tienen misma altura desde $O$ y base igual a la tercera parte de un lado del triángulo) y la parte sombreada está formada por 6 de estos triángulos, de modo que el área sombreada es $9 \cdot \frac{6}{9} = 6$.



3. **(b)** Sean $l$ la edad de Leonardo, $i$ la de Irving y $e$ la de Eduardo. Como $l$ es un divisor de 14 y de 35, tenemos que $l = 1$ o $l = 7$. Si suponemos $l = 1$ entonces $e = 35$, pero eso no puede ser pues $e < 14$. Así, $l = 7$ y, por tanto, $e = \frac{35}{7} = 5$ e $i = \frac{10}{5} = 2$. De esta forma, tenemos que $l + i + e = 7 + 2 + 5 = 14$.

4. **(d)** En total hay 16 cuadritos y cada pieza utiliza 4 cuadritos, así que no se pueden obtener más de 4 piezas. Notemos que no es posible que todos los cuadritos de la hoja sean parte de alguna pieza pues, si hay una pieza que tenga la esquina inferior izquierda de la cuadrícula, es fácil darse cuenta de que hay al menos un cuadrito que no formará parte de ninguna otra pieza. Así, no es posible recortar 4 piezas. En la figura se muestra una forma de por donde recortar tres.



5. **(e)** Un número jocoso debe tener al menos dos dígitos. Como el segundo puede ser a lo más 9, el primero debe ser mayor que 2. Si el primer dígito es 3, la única opción posible para el segundo dígito es 8. Así, el número jocoso más pequeño es 38 y la suma de sus dígitos es 11.

6. **(a)** Si se sacan 5 pelotas es posible que se haya tomado una de cada color, pero si se toman 6 forzosamente un color debe estar repetido.

7. **(b)** En cada vuelta que completa Jana, Abi está $\frac{1}{8}$ de vuelta más cerca de ella. Inicialmente estaban separadas por media vuelta, así que Abi alcanzará a Jana exactamente cuando ésta complete la cuarta vuelta.

8. **(e)** Basta elegir el mayor número de cada columna del mapa para saber cuál torre determina la altura que se ve desde el frente.

9. **(b)** Si hay dos números, el porcentaje es 50%. Como $\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$ basta con escribir 5 números en la lista y comenzar con un impar para obtener el 60%. Como $\frac{40}{100} = \frac{2}{5}$ basta con escribir 5 números en la lista y comenzar con un par para obtener el 40%. Como $\frac{48}{100} = \frac{12}{25}$ basta con escribir 25 números en la lista y comenzar con un par para obtener el 48%. Como $\frac{9}{20}$ es la simplificación de $\frac{45}{100}$, para que la lista tenga 45% de impares debe tener un múltiplo de 20 elementos y, por tanto, la longitud de la lista debe ser par así que contiene exactamente 50% de números impares y no 45% como queríamos.

10. **(e)** Valentina es la única que no nació en el mismo mes que alguien más, así que nació el 20 de febrero de 2001. Paco nació en un día con el mismo número que Valentina, así que nació el 20 de marzo de 2001 y es el más joven del grupo.

11. **(a)** Llamemos $h$ a la altura del triángulo grande. Entonces

$$\begin{aligned} 10 &= \frac{1}{2}PQ \cdot h \\ 5 &= \frac{1}{2}PQ \cdot (6-h). \end{aligned}$$

Dividiendo la primera ecuación entre la segunda obtenemos $\frac{h}{6-h} = 2$, de donde $h = 12 - 2h$ así que $h = 4$ y entonces, de la primera ecuación, tenemos $PQ = \frac{20}{4} = 5$.

12. **(c)** Cada vez que se plante un manzano en la posición $i$, en la posición $i+4$ no debe haber manzano; esto nos dice que hay un pino por cada manzano, salvo cuando $i + 4 > 20$. Entonces el máximo número de manzanos se alcanza cuando se plantan en las posiciones siguientes:

$$1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 17, 18, 19, 20.$$

13. **(b)** Tenemos que $\angle CNM + \angle CMN = 180^{\circ} - 43^{\circ}$. Así, $\angle ACB = \angle ACN + \angle BCM - 43^{\circ} = \angle CNM + \angle CMN - 43^{\circ} = 137^{\circ} - 43^{\circ} = 94^{\circ}$.

14. **(a)** Notemos que los números 1 y 2 deben corresponder a dos de las bolitas. Si el 1 está en $A$ entonces $B$ es 8. Como $D$ o $C$ deben tener la etiqueta del 2, el 10 debió usarse para etiquetar el palito que une al 2 con el 8 (lo cual sabemos que no sucedió). Si 1 se usó en $B$ la situación sería muy parecida a la del caso anterior. Luego, el 1 debió ponerse en $C$ o en $D$. Si 2 se usa para etiquetar $D$ entonces 3 sería la etiqueta de $DC$. Como las etiquetas de $A$ y $B$ deben sumar 9 las únicas opciones posibles serían 4 en un extremo y 5 en el otro. Si 4 es la etiqueta de $A$ entonces 5 es la etiqueta de $B$, así que $AD$ y $BC$ tendrían que etiquetarse con 6, lo cual no es posible (pues cada etiqueta se usó exactamente una vez). Si 4 es la etiqueta de $B$, la situación sería muy parecida a la del caso anterior. De esta forma, 2 y 7 son las etiquetas de $A$ y $B$ en algún orden. Supongamos que 7 es la etiqueta de $A$. Notemos

que 11 debe ser etiqueta de un palito, que además no puede estar pegada a una bolita con 1 o 2. El único lugar posible para colocarla es $AD$, así que en $D$ hay que escribir un 4 y en $DC$ un 5. Es fácil terminar de etiquetar el resto del tetraedro con los números sobrantes. Si 7 es la etiqueta de $B$ la situación es la misma que la anterior y también se obtiene que en $DC$ es forzoso escribir un 5.

15. **(c)** Si $n$ no es par, entonces sus divisores más grandes son, a lo más, $\frac{n}{3}$, $\frac{n}{5}$ y $\frac{n}{7}$, cuya suma es menor o igual a $\frac{71n}{105}$. Así, si $n$ es maléfico, debe ser par. Si $n$ no es múltiplo de 3, sus divisores más grandes son, a lo más, $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{4}$ y $\frac{n}{5}$, cuya suma es menor o igual a $\frac{19n}{20}$. Así, si $n$ es maléfico, debe ser múltiplo de 3. De esta forma, (c) es verdadera. Por otra parte, 30 es maléfico y no cumple (a) ni (d). Además 12 es maléfico y no cumple (b).