Soluciones del Examen Canguro Matemático 2014
Nivel Cadete

1. **(d)** El cuadrado debe tener 12 cm de lado, así que el rectángulo tiene medidas $6\,\text{cm} \times 24\,\text{cm}$ y su perímetro es $2(6+24) = 60$ centímetros.

2. **(c)** Tenemos que

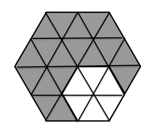
$$\underbrace{111\cdots 11}_{2014}\times 101 = \underbrace{111\cdots 11}_{2014}\times 100 + \underbrace{111\cdots 11}_{2014} = \underbrace{111\cdots 11}_{2014}00 + \underbrace{111\cdots 11}_{2014} = 11\underbrace{222\cdots 22}_{2012}11.$$

Entonces la suma de los dígitos es $2012 \times 2 + 4 = 4028$.

3. **(b)** El área total de los 5 círculos es de $5\,\text{cm}^2$, pero se han traslapado 4 veces, así que la superficie de la mesa que está cubierta es de $5 - 4(\frac{1}{8}) = \frac{9}{2}\,\text{cm}^2$.

4. **(b)** A partir de la segunda calificación, cada calificación que se agrega contribuye en la mitad del resultado parcial. Entonces, si sólo fueran 3 calificaciones, la tercera contribuiría en $\frac{1}{2}$, si fueran cuatro, contribuiría en $\frac{1}{4}$ (pues la cuarta contribuiría en la mitad y la contribución de la tercera sería la mitad de su contribución anterior); como son 5, contribuye en $\frac{1}{8}$, o sea 12.5 %.

5. **(c)** Podemos dividir el hexágono en 24 triángulos iguales, como se muestra en la figura. Como el hexágono menor quedó cubierto por 6 de estos triángulos, el área del hexágono es igual a $4 \times 4 = 16\,\text{cm}^2$.



6. **(c)** Las edades de Raquel, su hija y su nieta deben ser potencias de 2, así que debemos encontrar tres números del conjunto $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ que sumen 100. La única posibilidad es $64 + 32 + 4$.

7. **(c)** Llamemos O a la intersección de AD y BH y β al ángulo HOA. Tenemos que $\beta = 180 - 4\alpha$. Además, fijándonos en el triángulo AOH tenemos que $\beta = 90 - \alpha$. Así, resulta que $180 - 4\alpha = 90 - \alpha$, de donde $\alpha = 30$.

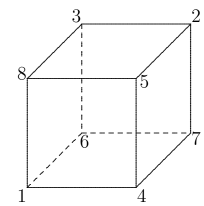
8. **(d)** Como quitar 50 monedas del total sería lo mismo que quitarle 5 monedas a cada pirata, tenemos que hay $\frac{50}{5} = 10$ piratas. Sabemos que 4 piratas recibieron $6 \times 10 = 60$ monedas (es lo que se repartiría entre el grupo si esos 4 piratas no estuvieran en él), así que cada pirata recibió $\frac{60}{4} = 15$ monedas. En total hay $10 \times 15 = 150$ monedas.

9. **(c)** La lista debe contener 13 múltiplos de 13, pero a lo más dos de ellos pueden ser pares, así que al menos 11 de ellos deben ser impares. La lista más pequeña es: 13×1, 13×2, 13×3, 13×4, 13×5, 13×7, 13×9, 13×11, 13×13, 13×15, 13×17, 13×19, $13 \times 21 = 273$.

10. **(e)** Si el 9 estuviera en la casilla central, la suma de sus vecinos sería $8 + 7 + 6 + 5 = 26$ y no cumpliría que la suma de sus vecinos es igual a 15. Por lo anterior, el 9 tiene que estar en alguno de los extremos y tener dos vecinos en las esquinas del cuadrado. La mayor suma que se puede obtener con números de las esquinas es $3 + 4 = 7$; como los vecinos de 9 suman 15, la única posibilidad es que esto suceda es que el 9 sea vecino de 3, 4 y 8. Luego, el 8 debe estar en la casilla central y sus vecinos son 5, 6, 7 y 9, que suman 27.

11. **(d)** Llamaremos O a la intersección entre TQ y RP. Como los triángulos OQR y RPQ son rectángulos, tenemos que $\angle TQR + \angle PRQ = \angle PRQ + \angle RPQ = 90^o$, de donde $\angle TQR = \angle RPQ$. Por lo anterior, como TQR y PRQ son triángulos rectángulos, resultan ser triángulos semejantes, así que $\frac{QR}{PQ} = \frac{TR}{QR} = \frac{PQ}{2QR}$, lo que implica que $\left(\frac{QR}{PQ}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

12. **(a)** Como $1+2+3+\cdots+8=36$ y cada vértice pertenece a 3 caras, entonces la suma de todas las sumas de las caras es 3×36, de donde cada cara debe tener suma $\frac{3\times 36}{6} = 18$. Entonces el número que va en el otro vértice de la base es $18-(1+4+6)=7$. Los números que faltan por colocar son 2, 3, 5 y 8. Entonces a la cara lateral que tiene ya los números 4 y 7 le falta una suma de 7, lo cual sólo se logra con 2 y 5 (de entre los números restantes). A la cara posterior que tiene ya los números 6 y 7 le falta una suma de 5, lo cual se logra sólo con los números 2 y 3; entonces ya tenemos que en lugar de x va 2. En la figura se muestra la colocación completa.



13. **(b)** Sea O el punto de intersección de AC y DB. Llamemos h y k a las respectivas alturas en O de AOB y de DOC. Tenemos que

$$\frac{AB\cdot h}{2} = 5 = \frac{15}{3} = \frac{AB\cdot(h+k)}{6},$$

de donde $h+k=3h$ y así $k=2h$. Por otro lado, los triángulos ABO y CDO son semejantes, de donde $DC = 2AB$ y obtenemos que el área de BDC es

$$\frac{2AB\cdot 3h}{2} = 6\frac{AB\cdot h}{2} = 30.$$

14. **(e)** Cuando se pregunta ¿‘Estás vestido de morado?”, los únicos que pueden responder ”Sí”son los amarillos, así es que hay 8 duendes amarillos que dijeron una mentira en la primera y en la tercera pregunta. Como 17 duendes respondieron ”Síçuando se preguntó ¿‘Estás vestido de verde?z 8 duendes amarillos mintieron en ese caso, en total hay $17-8=9$ duendes verdes y morados. Como estos 8 duendes amarillos fueron los únicos que dijeron la verdad en la segunda pregunta, hay $12-8=4$ duendes morados. Así, tenemos que hay $9-4=5$ duendes verdes y el número de duentes amarillos es $20-5-4=11$.

15. **(a)** Sea O el centro del 15-ágono y P el centro del n-ágono. El triángulo OAB es congruente a cualquier triángulo que se forme tomando como vértices a O y a los dos extremos de un lado del 15-ágono; como hay 15 triángulos de esos alrededor de O tenemos que el ángulo AOB mide $\frac{360^o}{15} = 24^o$. Esos 15 triángulos son congruentes y así el ángulo ABC (dentro del 15-ágono) es igual a la suma de los ángulos ABO y BAO, que es igual a $180^o - 24^o = 156^o$. Por otro lado, el triángulo BCD es equilátero y entonces el ángulo ABD (dentro del n-ágono) mide $360^o - 60^o - 156^o = 144^o$. Como $PAB + PBA = ABD$, el ángulo APB mide $180^o - 144^o = 36^o$, así que debe haber $\frac{360}{36} = 10$ triángulos congruentes a APB alrededor de P. Por lo anterior, tenemos que $n = 10$.