Soluciones del Examen Canguro Matemático 2016
Nivel Cadete

1. **(c)** Observemos primero que el lado AB mide el doble del AD, así que el área del rectángulo es 200. Por otro lado, recortando y reacomodando las regiones sombreadas es fácil ver que forman un cuadrado de la mitad del área del rectágulo $ABCD$.

2. **(d)** La única manera de obtener un resultado impar es sumando un par y un impar negativo. Por lo anterior, el mayor impar que se puede obtener es $5 = 6 - 1$, así que 7 no se puede conseguir. Los demás números se obtienen como sigue: $3 = 6 - 3$, $4 = 2 + 2$, $5 = 6 - 1$ y $8 = 4 + 4$.

3. **(c)** Los dos ángulos marcados son suplementarios de los dos ángulos agudos del triángulo rectángulo. Como la suma de los dos ángulos agudos del triángulo rectángulo es 90^o, la suma de los ángulos marcados es $180^o + 180^o - 90^o = 270^o$.

4. **(a)** Como los trozos que obtuvo tienen la misma longitud, del pedazo más largo Adriana cortó el doble de trozos que del pedazo más pequeño. Por lo anterior, la cantidad de trozos debe ser un múltiplo de 3, así que no es posible conseguir 8 pedazos. Como $9 = 6 + 3$, $12 = 8 + 4$, $21 = 14 + 7$ y $27 = 18 + 7$, las demás cantidades de pedazos son posibles.

5. **(e)** De las siguientes parejas, a lo más uno de los números puede haber quedado escrito: $\{1, 9\}$, $\{2, 8\}$, $\{3, 7\}$ y $\{4, 6\}$. Como quedaron 6 números en el pizarrón, forzosamente debió quedar escrito el 5.

6. **(e)** Llamemos a a la longitud del lado menor del trapecio. La longitud de lado mayor del rectángulo en donde se encierra la tira de papel doblada es 27 cm. Esta longitud se obtiene de sumar 5 veces el ancho de la banda (que es 3 cm) más 4 veces a, de donde $a = \frac{27-5\cdot 3}{4} = 3$. Además, los pedazos triangulares que quedan encimados son triángulos rectángulos isósceles de lado 3 y así la longitud de la tira es $19 \cdot 3$.

7. **(b)** Llamemos m a la cantidad de niñas y h a la cantidad de niños, Tenemos que $m + h = 20$ y que $\frac{1}{2}m = \frac{1}{3}h$, así que $\frac{1}{2}m = \frac{1}{3}(20 - m)$ y entonces $3m = 40 - 2m$ y $m = 8$.

8. **(c)** Cada lado del cuadrado mide 6. Podemos dividir la región sombreada en 4 triángulos cuyas bases son, respectivamente, a, b, c y d, y cuyas alturas son todas iguales a 6. Así, tenemos que $\frac{6\times a}{2} + \frac{6\times b}{2} + \frac{6\times c}{2} + \frac{6\times d}{2} = 27$, de donde $a + b + c + d = 9$.

9. **(a)** Digamos que la canasta de Caperucita tiene inicialmente p panecillos y que a cada tía le da a de ellos. Al entrar a casa de la primera tía, el lobo ya se comió la mitad de los panecillos, por lo que la canasta tiene $\frac{p}{2}$ panecillos. Al salir de esta casa, a la canasta le quedan $\frac{p}{2}-a$ panecillos. Al entrar a la casa de la segunda tía, la canasta tiene $\frac{p}{4}-\frac{a}{2}$ panecillos y al salir de ésta le quedan $\frac{p}{4}-\frac{3a}{2}$. Finalmente al entrar a la casa de la última tía, la canasta tiene $\frac{p}{8}-\frac{3a}{4}$ panecillos y al salir de esta le quedan $\frac{p}{8}-\frac{7a}{4}$ panecillos. Pero sabemos que al salir de casa de la tercera tía, la canasta ya no tiene panecillos. Por lo tanto $\frac{p}{8}-\frac{7a}{4}=0$, de donde obtenemos que $p=14a$. Es decir, el número de panecillos que tiene originalmente la canasta es un múltiplo de 14.

10. **(a)** Como todos los números escritos en el pizarrón son diferentes, los más pequeños pueden ser 1 y 16 o 2 y 8 (para que su producto de 16). Observamos que $225 = 3^2 \times 5^2 = 15^2$. Esto quiere decir que si el producto de dos números diferentes es 225, entonces uno de ellos tiene que ser mayor que 15 y el otro menor que 15. Por lo tanto, los dos números más pequeños deben ser 2 y 8. Esto implica que los dos números más grandes tienen que ser ambos mayores a 8. Para que su producto sea 225 la única opción es que los dos números más grandes sean 9 y 25. Como entre 8 y 9 no hay ningún número entero, entonces hay exactamente cuatro números escritos en el pizarrón: 2, 8, 9 y 25.

11. **(d)** Para calcular la suma del número que se escribe hasta arriba, los 4 de las esquinas de la base se suman una vez, el del centro de la base se se suma 4 veces y los 4 restantes de la base 2 veces. Claramente, conviene escribir en todos los de la base (menos en el del centro) un 1 y escribir un 42 en el del centro. Así, el número que se escribirá en la punta de la pirámide es 45×4.

12. **(b)** El lado del cuadrado mide 3. Sea O el centro del círculo y sea P el punto de tangencia de ST con el círculo. Dividamos el cuadrado en 9 partes iguales, como se muestra. Entonces OB es la diagonal de un cuadrado de lado 2, así que, por el teorema de Pitágoras, $OB = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$ y $PB = \sqrt{8}-1$. Por simetría, el triángulo SBT es isósceles, así que sus ángulos en S y T son de 45º. Como PB es perpendicular a ST, tenemos que $\angle PBT = 45º$, de donde $PT = PB$ y así $ST = 2(\sqrt{8}-1) = 4\sqrt{2}-2$.