Soluciones del Examen Canguro Matemático 2002
Nivel Estudiante

Solución 1. Flor y Cristina nacieron el mismo mes, así que ambas nacieron en marzo. El número de día del cumpleaños de Cristina y Daniela es el mismo, por lo tanto cada una cumple en un día 20. Con esos datos podemos deducir que Cristina nació en marzo 20, Flor en marzo 1, Daniela en julio 20 y Blanca en mayo 17. La respuesta es (a).

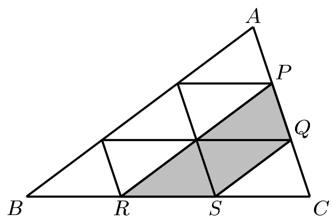
Solución 2. Cuando Alicia recorra $\frac{1}{4}$ de pista (y llegue a E) su hermano habrá recorrido $\frac{3}{4}$ en sentido contrario, y ésta será la primera vez que se encuentren. La respuesta es (e).

Solución 3. La mezcla tiene $\frac{3}{20} = \frac{15}{100}$ de sal. La respuesta es (d).

Solución 4. Entre Tere, Edgar y Liz se comieron 6 galletas. De las 14 restantes, César tuvo que haberse comido una cantidad mayor o igual a 5 (pues $\frac{14}{3} > 4$). Pero si César se hubiera comido exactamente 5 galletas alguno de los dos niños restantes se habría comido al menos 5 galletas (pues quedarían $14 - 5 = 9$ galletas para 2 niños), así que César debió comer al menos 6 galletas. La respuesta es (d).

Solución 5. Del 1 al 100 hay 33 múltiplos de 3 y 10 números que terminan en 3. Los números 3, 33, 63 y 93 están en ambas categorías, así que la respuesta es $33 + 10 - 4$. La respuesta es (d).

Solución 6. Dibujando líneas paralelas a los lados que pasen por P, Q, R y S obtenemos 9 triángulos iguales, de manera que el área sombreada es $\frac{3}{9}$. La respuesta es (b).



Solución 7. Sabemos que 3 es el único factor común en la descomposición en primos de a y b. Como el cociente es $0.4 = \frac{2}{5}$, entonces $a = 2 \times 3$ y $b = 5 \times 3$. La respuesta es (e).

Solución 8. Tenemos que $\angle ADE = \angle ADC + \angle CDE = 90^o + 60^o = 150^o$. Como el triángulo ADE es isósceles, tenemos que $\angle DEA = \frac{180^o - \angle ADE}{2} = \frac{180^o - 150^o}{2} = \frac{30^o}{2} = 15^o$. Como $\angle DEA = \angle CEB$ por simetría, resulta que $\angle \alpha = \angle AEB = 60^o - 15^o - 15^o = 30^o$. La respuesta es (b).

Solución 9. Dos círculos pueden intersectarse a lo más en 2 puntos. Como hay solamente 10 parejas de círculos, la cantidad de intersecciones debe ser menor o igual a 20, así que no pueden ser 22. Es fácil ver que las otras cantidades de intersecciones son posibles. La respuesta es (e).

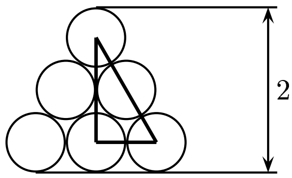
Solución 10. Notemos que el área de APQ es igual al área de PQC (que es 1) pues $AQ = QC$ y la altura desde P de ambos triángulos es la misma. Comparemos las áreas de PQC y PCB. Tenemos que $PQ = \frac{1}{2}BC$, y la altura de PQC desde C coincide con la altura de PCB desde P pues $PQ||BC$. Por lo anterior, el área de PCB es el doble del área de PQC, o sea 2. El área de ABC es la suma de las áreas de APQ, PQC y PCB, así que es igual a $1 + 1 + 2 = 4$. La respuesta es (c).

Solución 11. Como $3b$ siempre es un múltiplo de 3 entonces $a + c$ debe ser un múltiplo de 3. Por el criterio de divisibilidad entre 3 deducimos que el número de 2 dígitos ac debe ser también un múltiplo de 3. Hay 90 números de 2 dígitos, y $\frac{1}{3}$ de ellos son múltiplos de 3, o sea 30. Como hay 10 posibilidades para elegir el dígito b, en total hay $30 \times 10 = 300$ números que cumplen la condición. La respuesta es (b).

Solución 12. En el triángulo marcado en la figura tenemos, por el Teorema de Pitágoras, que $(2r)^2 + (2 - 2r)^2 = (4r)^2$, de donde obtenemos la ecuación de segundo grado $8r^2 + 8r - 4 = 0$. Aplicando la fórmula general y desechando la solución negativa:

$$\begin{aligned} r &= \frac{-8 + \sqrt{64 + 128}}{16} \\ &= \frac{-8 + \sqrt{64 \cdot 3}}{16} \\ &= \frac{-8 + 8\sqrt{3}}{16} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

La respuesta es (a).



Solución 13. Siempre que hay un grupo de 4 se juegan 6 partidos. En la primera ronda hay $\frac{16}{4} = 4$ grupos; en la segunda hay $\frac{8}{4} = 2$; en la tercera hay $\frac{4}{4} = 1$, y después viene el último partido. En total se juegan $6 \cdot (4 + 2 + 1) + 1 = 43$ partidos. La respuesta es (c).

Solución 14. Sean r y R los radios de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$, respectivamente. Tenemos que $R^2 + r^2 = 10$ y $(2r + R)R = 16$, de donde

$$\begin{aligned} PB &= \sqrt{(r + R)^2 + R^2} \\ &= \sqrt{r^2 + 2rR + R^2 + R^2} \\ &= \sqrt{(r^2 + R^2) + R(2r + R)} \\ &= \sqrt{10 + 16} \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

Nota: Tomando $R = \frac{8}{\sqrt{10}}$ y $r = \frac{6}{\sqrt{10}}$ se puede construir una figura con las condiciones dadas. La respuesta es (b).

Solución 15. Llamemos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ a los círculos de acuerdo con la numeración de sus puntos. Como el número de puntos en $\mathcal{A}$ es un número impar (25) todas las casillas en $\mathcal{A}$ son accesibles y la ficha puede pasar a lo otros círculos a través de $A_{22} = C_1$ y $A_1 = B_{11}$. Por otro lado $\mathcal{B}$ tiene una cantidad par (12) de puntos. Recorriendo $\mathcal{B}$ a partir de B_{11} uno puede alcanzar todos los puntos impares de $\mathcal{B}$, y como el otro punto de entrada a $\mathcal{B}$ (B_1) es también un punto con número impar, los puntos con números pares en $\mathcal{B}$ son inaccesibles. También $\mathcal{C}$ tiene una cantidad par de puntos (18), y uno puede entrar por $A_{22} = C_1$ y cubrir todos los puntos con números impares. También es posible entrar a $\mathcal{C}$ por $B_1 = C_{16}$ y cubrir todos los puntos con números pares. De esta manera, todos los puntos de $\mathcal{C}$ son accesibles. La respuesta es (b).