Soluciones del Examen Canguro Matemático 2003
Nivel Estudiante

Solución 1. Las bandas 1 y 2 tienen la misma área pues ambos son paralelogramos con la misma base y la misma altura. La banda 3 está formada por dos paralelogramos cuyas áreas suman lo mismo que las otras bandas. La respuesta es (a).

Solución 2. Tenemos que $2n^2$ es siempre par y, por tanto, $2n^2 + 2003$ es impar. Las expresiones (a), (c) y (d) son pares para $n = 2$ y (b) es par para $n = 1$. La respuesta es (e).

Solución 3. El volumen de una esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$, así que el resultado de Alan debe ser $\frac{4}{3}\pi(2r)^3 = \frac{4}{3}\pi 8r^3$. La respuesta es (c).

Solución 4. Tenemos que 30 litros son el $70\% - 30\% = 40\%$ del barril, así que en total le caben $\frac{30\cdot 100}{40} = 75$ litros. La respuesta es (b).

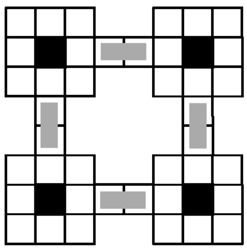
Solución 5. $2^{n+2003} + 2^{n+2003} = 2 \cdot 2^{n+2003} = 2^{n+2004}$. La respuesta es (e).

Solución 6. La más grande de las sumas es 19 y la más chica es 3. Es fácil ver que se pueden obtener todos los números entre esos dos. La respuesta es (c).

Solución 7. Durante el periodo 1999-2002 ingresaron $325 \times 4 = 1300$ estudiantes y en el periodo 1999-2003 fueron $390 \times 5 = 1950$. La respuesta es (e).

Solución 8. Es claro que el triángulo más a la derecha tiene base 1 m y es semejante al triángulo que contiene al cuadrado pequeño, que tiene base 2 m. Por lo tanto, este triángulo pequeño tiene altura uno, de donde el área del triángulo que contiene al cuadrado es 2 m^2 y el área de la región sombreada es 1 m^2. La respuesta es (a).

Solución 9. Es fácil ver que debemos poner piezas en los lugares indicados en la figura o no sería posible cubrir todos los cuadros blancos.



Como tenemos dos formas para llenar cada grupo alrededor de un cuadro negro en total tenemos $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ formas. La respuesta es (b).

Solución 10. En los 2003 números, hay 667 múltiplos de tres, 668 números que dejan residuo 0 y 668 que dejan residuo 2. Cada vez que Manuel quita tres tarjetas, quita un número de cada categoría así que las tarjetas sobrantes no pueden ser múltiplos de tres. La respuesta es (c).

Solución 11. La altura debe tener la longitud más corta, 12. Entonces podemos partir al triángulo en dos triángulos rectángulos a los que llamaremos A y B. El triángulo A tiene un cateto de longitud 12 y la hipotenusa mide 15, así que (por teorema de Pitágoras) el otro cateto mide 9 y A tiene un área igual a $(12 \times 9)/2 = 54$. Análogamente se obtiene que el otro cateto de B mide 5 y B tiene área 30. La respuesta es (d).

Solución 12. Comencemos viendo que $2003 \cdot 2005 = (2004+1)(2004-1) = 2004^2 - 1$. Utilizando el mismo procedimiento podemos ver que

$$\begin{aligned}
& \sqrt{1+2000\sqrt{1+2001\sqrt{1+2002\sqrt{1+2003\cdot 2005}}}} \\
= & \sqrt{1+2000\sqrt{1+2001\sqrt{1+2002\cdot 2004}}} \\
= & \sqrt{1+2000\sqrt{1+2001\cdot 2003}} \\
= & \sqrt{1+2000\cdot 2002} \\
= & 2001
\end{aligned}$$

La respuesta es (b).

Solución 13. Cuando quitamos a 1 y a n de los divisores positivos de n, tenemos que el mayor y el menor, multiplicados, deben dar n. Llamando a al menor divisor positivo de n, la condición del problema dice que $n = 15a^2$. Pero entonces 3 divide a n, así que $a \leq 3$. Sólo tenemos dos soluciones, cuando $a = 2, 3$. La respuesta es (c).

Solución 14. Podemos reducir el problema observando que podemos considerar a la gaviotas grises como iguales entre sí y a las gaviotas blancas como iguales entre sí pues considerarlas distintas sólo agrega a los cálculos un factor que se cancela al calcular la probabilidad. El total de acomodos que tienen las gaviotas blancas se puede contar escogiendo dos lugares de entre los 10 que hay, lo cual nos da como resultado $(10 \times 9)/2 = 45$ posiblidades. Los arreglos donde las gaviotas blancas están juntas son claramente 9. La respuesta es (e).

Solución 15. Como $ABCDE$ es regular, sabemos que $\angle ABC = 108^o$ y que $\angle BAC = 36^o$. El ángulo $ABF = 108^o - 90^o = 18^o$ y como el triángulo ABF es isósceles entonces $\angle FAB = (180^o - 18^o)/2 = 81^o$ por lo que $\angle FAC = 81^o - 36^o = 45^o$. La respuesta es (d).