Soluciones del Examen Canguro Matemático Mexicano 2008. Nivel Estudiante

1. **(e)** El cubo originalmente tenía 12 aristas. Al cortar se agregaron 3 aristas por cada uno de los 8 vértices, así que se agregaron 24 aristas. En total quedaron 36.

2. **(a)** Como dos días consecutivos (jueves y viernes) dice la verdad, y no hay dos respuestas juntas iguales, entonces uno de los días que falta es jueves o viernes. Si el que falta es jueves, entonces la primera respuesta fue en viernes, su nombre sería Mario y en martes habría dicho Pedro, así que, efectivamente, habría mentido el martes. Por otro lado, si al final fue viernes, entonces su última respuesta habría sido verdadera así que su nombre sería Beto, pero la respuesta del martes anterior habría sido también Beto, de manera que no habría mentido en martes y esto es imposible.

3. **(e)** Como QPB es un triángulo rectángulo con el ángulo $\sphericalangle QPB=40^o$, entonces $\sphericalangle QBP=50^o$. Ahora, $\sphericalangle QPA=180^o-(120^o+40^o)=20^o$, y así $\sphericalangle QAP=180^o-(90^o+20^o)=70^o$, de donde $\sphericalangle ABC=\frac{1}{2}(180^o-70^o)=55^o$ y de aquí que $\sphericalangle PBC=55^o-50^o=5^o$.

4. **(d)** Para lograr 10 puntos con dos números distintos, lo mínimo que puede ser el mayor de ellos es 6 (pues 10=1+9=2+8=3+7=4+6); análogamente, para obtener 18 puntos como suma de dos números, lo máximo que puede ser el menor de ellos es 8 (pues 18=8+10=...=1+17). La única posibilidad de que haya un número intermedio (que es el 7) es con 4, 6, 8 y 10. La suma de todos es 35.

5. **(c)** El recorrido total se hace en 50 min; se quiere lograr que el intervalo sea de 10 min (que es el 40% de 25); para esto se necesitan 5 camiones.

6. **(a)** En un triángulo la suma de cualesquiera dos lados debe ser mayor que el otro. Recíprocamente, si tres números $a\le b\le c$ son tales que $c\le a+b$ (y, por tanto cada uno de a, b y c es menor o igual que la suma de los otros dos), entonces se puede construir un triángulo con esas dimensiones. Las únicas formas de lograr 12 como suma de tres números que cumplan esta propiedad son: 2+5+5, 3+4+5 y 4+4+4 (el mayor de los números no puede exceder 5, pues si fuera 6 o más, la suma de los otros dos no sería mayor que él).

7. **(c)** Tenemos que
$a_1=0, a_2=0-1=-1, a_3=-1+2=1, a_4=1-3=-2, a_5=-2+4=2, a_6=2-5=-3, a_7=-3+6=3,\ldots$
Observamos entonces que la sucesión es 0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, -5, 5 y así sucesivamente, por lo que $a_{4016}=-2008$ y $a_{4017}=2008$.

8. **(a)** Multipliquemos las dos ecuaciones dadas: $x^3y^3z^3=7^{12}$. Entonces $xyz=7^4$.

9. (c) Sea x el ancho usado. Entonces $\frac{x}{4}=\frac{9}{16}$, así que $x=\frac{9}{4}$. Entonces la parte no usada tiene ancho $3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$. La parte no usada tiene área $\frac{3}{4}\times 4=3$, así que la respuesta es $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.

10. **(b)** Contemos las posibilidades de que los tres puntos estén alineados: En cada horizontal hay 4 posibilidades, así que en total en las horizontales hay 12; en las verticales hay 4, y en las diagonales también hay 4. En total el número de formas de escoger tres puntos alineados es 20. El número total de formas de escoger los 3 puntos es $\frac{12\times 11\times 10}{3\times 2\times 1}=220$. La probabilidad es el cociente: $\frac{20}{220}$.

11. **(d)** A las distancias de A, B, D y E al círculo llamémosles, respectivamente, a, b, d y e. Tenemos que $a+e+EC=6$, y $b+d+DC=5$. Sumando estas ecuaciones obtenemos $a+b+d+e+EC+DC=11$, pero $a+b=3$, así que $d+e+EC+DC=8$, y éste es el perímetro buscado.

12. **(b)** Observemos que
$3^{32}-1=(3^{16}-1)(3^{16}+1)=(3^{8}-1)(3^{8}+1)(3^{16}+1)=(3^{4}-1)(3^{4}+1)(3^{8}+1)(3^{16}+1)$.
Pero $3^4-1=80$ y $3^4+1=82$, así que éstos son los divisores buscados y $80\times 82=6560$.

13. **(e)** Tenemos que área $(AOB)=1/4$, así que área $(OAL)=1/8$. Si llamamos X al punto medio de OL y trazamos las rectas KX y RX, entonces el triángulo AOL queda partido en 4 triángulos iguales, tres de los cuales forman el cuadrilátiero $KRLO$, así que el área de $KRLO$ es $3/4$ del área de OAL, es decir, $3/32$. Finalmente multiplicamos por 4.

14. **(b)** Conviene hacer un esquema llamando d a la distancia entre r y s.

d d 2d
r ----------- s ----------- t ---------------------- u

Entonces el punto medio entre s y u es $s+\frac{3d}{2}$ o, equivalentemente, $t+\frac{d}{2}=t+\frac{s-r}{2}$. (Del esquema es fácil ver que las demás respuestas son todas distintas de $t+\frac{d}{2}$.)

15. **(e)** Los múltiplos de 17 de dos cifras son: 17, 34, 51, 68 y 85. Los de 23 son: 23, 46, 69 y 92. Queremos juntar los números de esta lista para formar uno de 2008 cifras. Observemos que ningún número empieza en 7 así que no es posible usar el 17; por esta misma razón no es posible usar el 1 y entonces tampoco el 5 y de aquí que tampoco el 8. Los que sobran son: 34, 23, 46, 69 y 92. Al juntar éstos logramos 346, 234, 469, 692 y 923. Ahora, para juntar dos de éstos las posibilidades son: 3469, 2346, 4692, 6923 y 9234. Aquí ya vemos que al repetir cíclicamente 34692 formamos un número como el buscado y lo mismo con 23469, 46923, 69234 y 92346. Ahora, los números 17, 51, 68 y 85 pueden agregarse a continuación del dígito 6 en los las repeticiones cíclicas de los 5 números dados, es decir, faltaría agregar 4 números que son los terminados en: 68517, 6851, 685 y 68. En total son 9 números.