Soluciones del Examen Canguro Matemático 2013
Nivel Estudiante

1. **(a)** $4^{3^2} = 4^9 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 \cdot 4^3 \cdot 4^3$.

2. **(b)** La vista (a) es desde adelante, la (c) es desde la derecha, la (d) es desde arriba y la (e) es desde abajo.

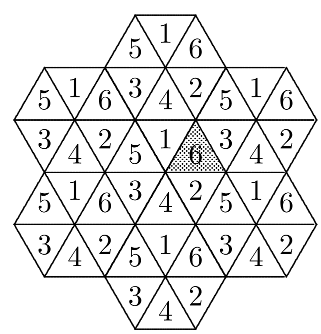
3. **(c)** Tenemos que n debe satisfacer $100 \leq \frac{n}{3} \leq 999$ y $100 \leq 3n \leq 999$; de la primera vemos que $300 \leq n$ y de la segunda obtenemos $n \leq 333$. Entonces el total de números qus satisfacen la condición es $333 - 299 = 34$.

4. **(b)** Digamos que los números de villanos capturados son 1, 2, 3, a, b y c con c mayor que los demás. Tenemos que $1+2+3+a+b+c = 20$, de donde $a+b+c = 14$. Entonces $c > \frac{14}{3}$, o sea que $c \geq 5$. Si $c = 5$, entonces $a+b = 9$, lo cual es imposible porque $a, b < c = 5$. El valor de $c = 6$ es posible tomando $a = 4 = b$.

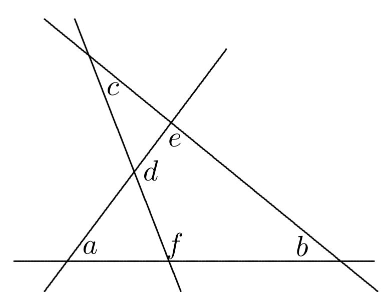
5. **(e)** Tomando dos pares de diagonales perpendiculares tenemos que el círculo está inscrito en un cuadrado de 10×10 de lado, así que el diámetro del círculo es 10 y el radio es 5.

6. **(d)** La primera condición dice que las cantidades eran impares. La segunda dice que los números eran 2, 5, 8, 11 o 14. Entonces tenía 5 monedas de 20 y 11 de 10 para un total de 2.10.

7. **(e)** Empecemos viendo qué números deben ir en la parte de abajo a la izquierda. En el triángulo que está debajo del 6 y a la derecha del 4 debe ir un 2 porque ese triángulo forma parte de dos hexágonos en los cuales ya se usaron todos los números salvo el 2. Por una razón similar, encima del 1 y al lado del 3 debe ir un 4; entonces en el hexágono que forman estos dos números que acabamos de poner ya sólo queda poner un 5. Ahora, arriba del 2 y al lado del 1 en el hexágono inferior, también deducimos que debe ir un 6 y justo arriba de ese 6 debe ir 2 y al lado del 6 debe ir un 3. Arriba del 4, entre el 5 y el 6, sólo puede ir un 1. Finalmente, en el triángulo sombreado va el 6. La figura completa queda como se muestra.



8. **(b)** En la figura se han marcado los ángulos e y f. Tenemos $e = 180^o - a - b = 180^o - 55^o - 40^o = 85^o$ y $f = 180^o - c - b = 180^o - 35^o - 40^o = 105^o$. Así, $d = 360^o - e - f - b = 360^o - 85^o - 105^o - 40^o = 130^o$.



9. **(c)** Es posible lograr que n cuerdas se intersecten todas entre sí y entonces el número de intersecciones es $\frac{n(n-1)}{2}$. Para $n=10$, $\frac{n(n-1)}{2}=45$ y para $n=11$, $\frac{n(n-1)}{2}=55$. Si se ponen 10 cuerdas de manera que todas se intersecten entre sí, basta poner una cuerda más que sólo intersecte a 5 de las anteriores.

10. **(d)** Llamemos s al volumen de la sustancia cuando está sólida y l cuando está líquida. Tenemos que $s+\frac{1}{12}s=l$ de donde $\frac{13}{12}s=l$ $(*)$. Buscamos p tal que $l-pl=s$, en otras palabras $(1-p)l=s$. Despejando s en $(*)$ obtenemos $l=\frac{12}{13}s$, así que $1-p=\frac{12}{13}$ y entonces $p=\frac{1}{13}$.

11. **(a)** Los valores en que la función es 0 son -4 y 0, así que se debe de tener $f(f(x))$ sea uno de estos valores. Ahora, f toma el valor -4 sólo en -8, así que una posibilidad es $f(x)=-8$; y, otra vez, el valor 0 lo toma en -4 y en 0, de donde las otras posibilidades son $f(x)=-4$ y $f(x)=0$. En el primer caso, sólo hay un valor de x y lo mismo ocurre en el segundo caso; para el tercer caso ya sabemos que son 2. En total son 4 valores de x.

12. **(c)** Las posibles sumas de dígitos son los números del 1 al 27; la suma 1 sólo se logra con el número 100, y la suma 27 sólo se logra con el número 999. Todas las demás sumas se logran con al menos dos números. Entonces sería posible que Francisco escogiera el 100, el 999 y dos números de cada una de las otras 25 sumas y todavía no habría encontrado 3 números con la misma suma de dígitos; una tarjeta extra forzosamente repetiría suma.

13. **(b)** Llegaron 20 corredores antes que David, así que llegaron 30 corredores después de Rodrigo. Llamemos x a la cantidad de corredores que llegaron antes que Rodrigo. Tenemos que $2x+20=30+x$, de donde $x=10$. En total hubo $10+1+30=41$ corredores.

14. **(b)** Observemos cómo son las respuestas dependiendo de lo que son los hombres. Denotemos por M a los mentirosos y por C a los caballeros y escribamos MM si los dos son mentirosos, MV si el primero al que preguntó es mentiroso y el segundo es caballero, etc. Escribamos cómo son las respuestas en cada uno de los cuatro casos:

$$CC \to (\text{sí, sí}), \qquad CM \to (\text{no, no}), \qquad MC \to (\text{sí, no}), \qquad MM \to (\text{sí, sí}).$$

Si la primera respuesta hubiera sido no, ya se sabría que los hombres son CM. Como nos dicen que de la primera respuesta no se puede deducir, entonces la primera respuesta fue sí y las posibilidades son CC, CM y MC. Pero nos dicen que de la segunda respuesta ya se supo y, como CC y y MM tienen las mismas segundas respuestas, éste no es el caso. La respuesta correcta es la única que difiere: MC.

15. **(d)** En la siguiente figura se muestra que $n=0,2,3,4$ son posibles. No es difícil convencerse que n no puede ser 1 ni mayor o igual a 5.