Soluciones para el Examen Eliminatorio Estatal de la OMM 2010

1. **(c)** El segundo renglón tiene 10 más en cada casilla que el primero, así que en $*$ debe haber 100 menos que 2010.

2. **(a)** Forzosamente hay que pasar por exactamente un círculo en cada diagonal con dirección $\backslash$. De esta manera, las sumas posibles son $1+2+1+2+1=7$ y $1+2+3+2+1=9$.

3. **(d)** Cada vez que se agrega un número impar a la suma, se completan los puntos de un cuadrado. Entonces $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$. Para $n=50$ se tiene que $2n-1=99$.

4. **(e)** El número mayor es al que debe restársele más.

5. **(e)** Sea S el área sombreada. El semicírculo menor puede moverse a completar, con el de 4 cm, un medio círculo de 4 cm. Entonces $S=\frac{\pi 4^2}{2}=8\pi$. Análogamente la parte sombreada puede moverse para completar, con el de 8 cm, un medio círculo de 8 cm. Así la fracción del dibujo que está sombreada es $\frac{8\pi}{8^2\pi/2}=\frac{1}{4}$.

6. **(a)** Tenemos la ecuación $\frac{85}{100}x+1=\frac{90}{100}x$, de donde $5x=100$ y así $x=20$.

7. **(c)** Como los dados son iguales y el de la izquierda tiene la misma posición que el de la derecha, los lados pegados de los dos dados de los extremos suman 7. También en el dado central la suma de los lados pegados es 7. Entonces la suma total es 14.

8. **(e)** Hay 10 asientos hacia cada lado del pasillo y cada fila tiene 20 asientos. El asiento 100 queda totalemente a la derecha en la quinta fila y el 99 totalmente a la izquierda; 64 y 76 quedan en la cuarta fila y 76 está más cerca de 100 que 64; 104 y 118 quedan en la sexta fila y 118 está más cerca de 100 que 104. Las posiciones cercanas a 100 son:

116	118	120
96	98	100
76	78	80

9. **(b)** La estrella pesa lo mismo que el círculo y ellos juntos pesan lo mismo que el triángulo, de manera que si e es el peso de la estrella, c es el peso del círculo y t es el peso del triángulo, entonces $c = e$ y $c + e = t$, o sea que $2e = t$. Ahora, el triángulo, el círculo y la estrella pesan lo mismo que el cuadrado, así que el cuadrado pesa $2t = 4e$. Podemos seguir así para obtener que $8e$ es la mitad del peso total del móbil, de donde $8e = \frac{112}{2} = 56$, lo cual nos da que $e = 7$.

10. **(a)** El ángulo en D mide $180^o - 50^o - 65^o = 65^o$, así que el triángulo ACD es isósceles con $AC = AD$. Pero entonces también es isósceles el triángulo ABC, de donde el ángulo en B mide $\frac{180^o - 70^o}{2} = 55^o$.

11. **(b)** Suponiendo que el número fuera mayor que todos, la respuesta sería $1998 + 12$, pero también sería $2010 + 7$ y $2015 + 5$, lo cual es imposible porque estos números son distintos. Análogamente, si el número fuera menor serían iguales los números $1998 - 5$, $2010 - 7$ y $2015 - 12$. Esto también es falso, así que el número es intermedio. Como $5 + 7 = 12$, basta que restemos 7 a 2010 y ésta es la respuesta.

12. **(c)** Al principio la suma de todos los números será $1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55$. En el primer paso quedan 9 números en el pizarrón y la suma de ellos es $55 - 1 = 54$. En el segundo paso quedan 8 números y su suma es $55 - 2 = 53$, y así sucesivamente hasta que en el noveno paso queda un número y la suma es el mismo número: $55 - 9 = 46$.

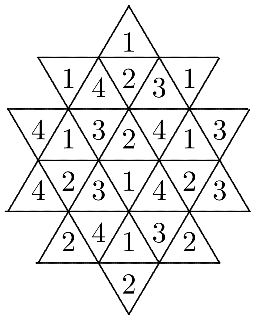
13. **(a)** Observemos que $\angle ECF = 90^o - 60^o = 30^o$, así que $\angle FCD = 90^o$ y FD es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos iguales de medida 1 y tenemos, por el teorema de Pitágoras, que FD mide $\sqrt{2}$.

14. **(b)** Sean a la cantidad de tarjetas que tienen el número 4 y b las que tienen el número 5. Entonces $a + b = 18$ y $4a + 5b$ es un múltiplo de 17, digamos $17c$. Multiplicando la primera ecuación por 5 y restándole la segunda tenemos $a = 90 - 17c$, pero $a \leq 18$, de donde $17c \geq 90 - 18 = 72$. Por otro lado $a \geq 0$, así que $17c \leq 90$. El único múltiplo de 17 entre 72 y 90 es $85 = 17 \times 5$, y de donde $a = 5$.

15. **(e)** La distancia de cada vértice del cuadrado al centro del mismo es $\sqrt{2}$ y entonces éste es el radio del los semicírculos. Sea d el diámetro de cada círculo sombreado. Entonces $\sqrt{2} + \sqrt{2} - d = 2$, de donde $d = 2 - 2\sqrt{2}$ y así el radio

de cada círculo sombreado es $1-\sqrt{2}$. El área sombreada es $4\pi(1-\sqrt{2})^2 = 4\pi(1-2\sqrt{2}+2) = 4\pi(3-2\sqrt{2})$.

16. **(b)** Se deben llenar las casillas de manera que cada 4 casillas los números se repitan. Entonces la tabla completa queda llena como sigue:



17. **(e)** Basta que las cifras de las centenas y de las unidades sean ambas pares o ambas impares. Con la primera propiedad hay $5\times 5 = 25$ posibilidades. Con la segunda propiedad hay 4×5 (ya que la cifra de las centenas no puede ser 0 pero la de las unidades sí). En total son $25+20=45$.

18. **(e)** El rectángulo $ABCD$ tiene área 40. Como $x+y=z$, el rectángulo $EFGH$ también tiene área 40, de donde $HG = EF$ es un divisor de 40 menor que $AB = 10$. Entonces $z = 40 - EF\cdot 4$ y, al variar $EF = 1, 2, 4, 5, 8$, tenemos, respectivamente, $z = 36$, 32, 24, 20, 8.

19. **(d)** Digamos que a es la distancia entre las barras de los carritos empalmados y d es el largo de cada carrito. Entonces $d+9a = 2.9$ y $d+19a = 4.9$. Así $2.9-9a = 4.9-19a$, de donde $100a = 20$ y de aquí que $a = .2$. Sustituyendo en la primera ecuación obtenemos $d = 2.9-1.8 = 1.1$.

20. **(c)** Como las respuestas son distintas, sólo uno pudo haber dicho la verdad, así que hay 3 mentirosos, los cuales juntan $3\cdot 7 = 21$ tentáculos. Si el pulpo que dijo la verdad tiene 6 tentáculos, entonces la respuesta es 27 y es verde; si tiene 8 tentáculos entonces habría dado la respuesta 29, así que este caso es imposible.

21. **(d)** Dos de los puntos deben estar diametralmente opuestos y el otro puede

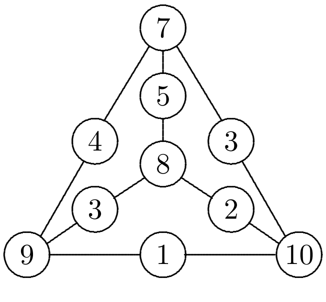
ser cualquiera de los 12 restantes. Como hay 7 parejas de puntos diametralmente opuestos la respuesta es $7 \cdot 12 = 84$.

22. **(c)** Llamemos R al radio del círculo mayor y r al del círculo menor. Por el teorema de Pitágoras tenemos que $R^2 = 64 + r^2$, de donde $R^2 - r^2 = 64$. El área sombreada es $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = 64\pi$.

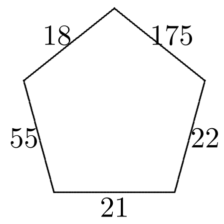
23. **(a)** Observemos primero que $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Entonces los posibles valores para $\{x, y\}$ son $\{1, 105\}$, $\{3, 35\}$, $\{5, 21\}$, y $\{7, 15\}$, Sin embargo, en cualquier triángulo los lados menores deben sumar más que el lado mayor, así que la única posibilidad es $\{x, y\} = \{7, 15\}$ y entonces el perímetro es $7 + 13 + 15 = 35$.

24. **(b)** Sea S el área sombreada y sea a el área de la parte que queda doble. Entonces el área del triángulo es $S + 2a$, de donde $S + 2a = 1.5(S + a)$, pero $S = 1$, así que $2 + 4a = 3(1 + a)$, $a = 1$ y el área del triángulo original es 3.

25. **(d)** Llamemos x al número de abajo a la iquierda. Entonces la suma de los números alineados es $11 + x$, de donde abajo a la derecha el número es $x + 1$. Por la línea inferior tenermos $11 + x = 2x + 2$, lo que nos dice que $x = 9$ y las sumas son 20. Con esto ya es fácil completar el esquema y queda como se muestra abajo. La suma buscada es $9 + 3 + 5 + 2 + 10 = 29$.



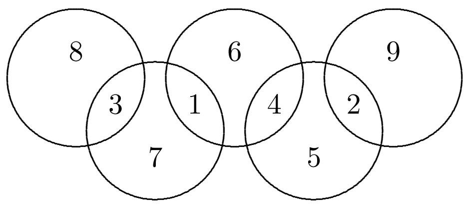
26. **(d)** En cada lado debe aparecer un número compuesto (no primo) pues con cada uno de los lados opuestos debe tener un factor en común (distinto de 1), y estos dos factores deben ser distintos entre sí. Con esto concluimos que 19 no puede aparecer. Los otros tres sí pueden, como se muestra en el ejemplo siguiente.



27. **(a)** De la ecuación $2x = 5y$ tenemos que x es múltiplo de 5: $x = 5a$, y que y es múltiplo de 2: $y = 2b$. Entonces $10a = 10b$, de donde $a = b$ y así $x + y = 5a + 2a = 7a$. Dentro de las opciones el único número que es múltiplo de 7 es 2009.

28. **(d)** Como $a - 1$ y a no tienen factores en común, $a - 1$ debe ser divisor de $a + 3$. La diferencia entre ellos es 4 así que $a - 1$ también debe ser divisor de 4. Las posibilidades son $a - 1 = 1$ (y $a + 3 = 5$), $a - 1 = 2$ (y $a + 3 = 6$) y $a - 1 = 4$ (y $a + 3 = 8$).

29. **(b)** La suma de los 6 números en los 2 círculos inferiores es 22. Como los números son distintos y van del 1 al 9, la única posibilidad es que estos números sean 1, 2, 3, 4, 5 y 7. Entonces en el lugar de la interrogación va 6, 8 o 9. No puede ir el 9 pues en ese círculo debe haber otros dos números distintos y la suma debe ser 11. Tampoco puede ir el 8 porque los números en ese mismo círculo serían 1 y 2, pero en alguna de las esquinas superiores iría el 9 y junto al 9 debería ir 2. En el siguiente esquema se muestra que 6 sí es posible.



30. **(c)** Se van formando triángulos isósceles. En el primero los ángulos iguales miden 7º, en el segundo 14º, en el tercero 21º, y así sucesivamente. Sea n el número de pasos posibles. Como la suma de esos dos ángulos iguales debe ser menor a 180º, tenemos que $2 \cdot 7 \cdot n < 180$, de donde $n < \frac{180}{14}$ y así $n \leq 12$.