ÚLTIMA ETAPA ESTATAL DE LA
18a OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

Primer día

Tiempo límite: 4:30 horas.
Escribe todos los razonamientos.
No puedes usar calculadora.
Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas distintas.
Puedes preguntar por escrito las dudas que tengas sobre los enunciados de las preguntas del examen.

1. Hay $2n+1$ duendes. Al principio cada duende tiene exactamente n amigos entre los demás duendes. Cada día cada duende se convierte en amigo de los amigos de sus amigos. Prueba que debe llegar un día en el que todos sean amigos entre sí.

2. Encuentra todos los números enteros n que satisfagan todas las condiciones siguientes: $n < 1000$, n es múltiplo de 3, n termina en 1 y n es suma de dos cuadrados.

3. En un triángulo ABC un punto D en el segmento BC es tal que $BD = 2DC$. Sea E el pie de la altura de ABC por B y sea $\mathcal{L}$ la recta que pasa por C y que es perpendicular a AC. Sea O el punto sobre $\mathcal{L}$ tal que $OB = OE$. Prueba que D, E y O está alineados.

4. Encuentra todas las parejas de enteros (x, p) con p primo y tales que $xp^2 - 3 \cdot 2^p = x^3$.

ÚLTIMA ETAPA ESTATAL DE LA
18a OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

Segundo día

Tiempo límite: 4:30 horas.
Escribe todos los razonamientos.
No puedes usar calculadora.
Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas distintas.
Puedes preguntar por escrito las dudas que tengas sobre los enunciados de las preguntas del examen.

5. En un círculo están marcados en forma consecutiva (en el orden de las manecillas del reloj) los números del 1 al 2004. En cada número múltiplo de 6 hay una ficha marcada con el mismo número de su casilla. Cada segundo cada ficha se mueve en el sentido de las manecillas del reloj el mismo número de espacios de la ficha (por ejemplo, después de 4 segundos, la ficha 30 está en la casilla 150). ¿Cuántos segundos deben de transcurrir para que todas las fichas estén por primera vez juntas en una misma casilla?

6. Sobre cada lado de un paralelogramo se dibuja un cuadrado (hacia el exterior del paralelogramo y de manera que el lado del cuadrado sea el lado respectivo del paralelogramo). Prueba que los centros de los cuatro cuadrados son los vértices de otro cuadrado.

7. Se dispone de colchones de hule espuma que se van a encimar unos sobre otros (uno a la vez) para formar una torre. Unos colchones pesan 1 Kg y miden 1 cm de alto; otros pesan 2 Kg y miden 2 cm de alto. Cada vez que se coloca un colchón de 1 Kg encima de los que ya están apilados, todos los de abajo disminuyen su altura a la mitad, y cada vez que se coloca un colchón de 2 Kg encima de los que ya está apilados, todos los de abajo disminuyen su altura a la cuarta parte. Prueba que es posible encimar colchones de manera que la torre al final mida más que 2.666 cm, pero que no es posible lograr una altura final de $\frac{8}{3}$ cm.

8. En una ciudad hay dos ríos paralelos $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ unidos por 10 calles y separados por otras 5 calles, de manera que las calles forman una cuadrícula. ¿Cuántas rutas de autobús se pueden diseñar del río $\mathcal{R}$ al río $\mathcal{S}$ si durante el recorrido total el autobús debe dar menos de 5 vueltas y no debe pasar dos veces por un mismo lugar?