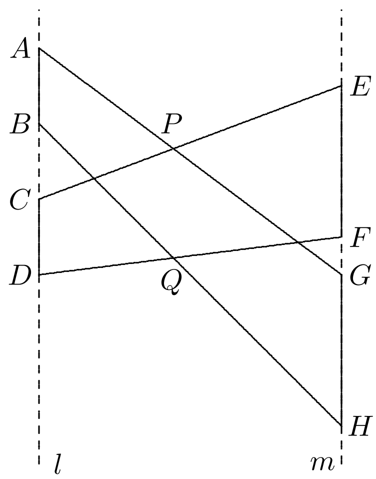
25ª OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS
FINAL ESTATAL 2011, Primer día

1. En un torneo había 7 equipos que jugaron todos contra todos una vez. Cada día se efectuó un partido. En determinado momento se observó que cada equipo había jugado a lo más 3 juegos. Probar que a alguno de los equipos le faltaban en ese momento por lo menos 4 juegos por jugar.

2. En un planeta, el año dura 101 días y los días están numerados del 1 al 101. Resulta que llueve un día, después deja de llover dos días, al día siguiente vuelve a llover y después deja de llover el día siguiente; otra vez llueve y luego pasan dos días más sin llover y así sucesivamente, alternándose los días que no hay lluvia en 2, 1, 2, 1, 2, etc. Llovió por primera vez el día 2, luego el 5, luego el 7, luego el 10, luego el 12, etc. Probar que, al pasar de los años, llega un momento en que ha llovido exactamente el mismo número de veces cada fecha del año, y encontrar cuántos años deben pasar para que eso ocurra.

3. Sean l y m dos rectas paralelas. Sean A, B, C y D puntos en l y E, F, G y H puntos en m de forma que $|AB| = |CD|$ y $|EF| = |GH|$ (ver figura). Sean P y Q los puntos de intersección de AG con CE y de BH con DF respectivamente. Demostrar que el segmento PQ es paralelo a las rectas l y m.



4. Encontrar todos los conjuntos A que consten de 4 enteros menores que 250, en los cuales cada pareja de elementos tenga máximo común divisor igual a un número primo, y que todos esos primos sean distintos.

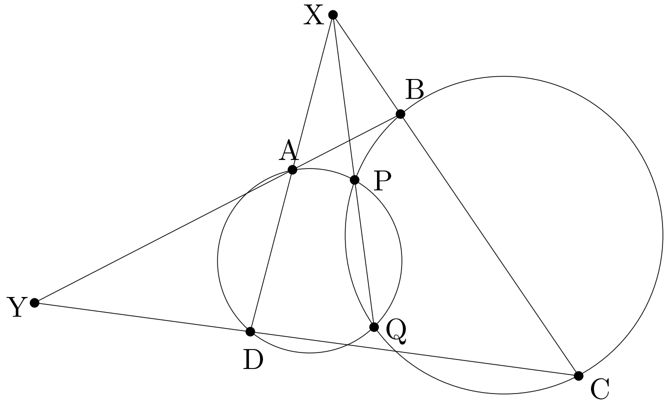
25ª OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS
FINAL ESTATAL 2011, Segundo día

5. Probar que todos los enteros positivos impares se pueden escribir en la forma

$$a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \cdots + a_n \cdot 2^n,$$

donde n es cualquier entero no negativo y cada a_i es 1 o -1 (por ejemplo, $11 = 1 - 2 + 4 + 8$).

6. En la figura hay dos círculos que se intersectan en los puntos P y Q; X es un punto sobre la recta por P y Q, y los puntos A, B, C y D son las intersecciones de los círculos con rectas que pasan por X, como se muestra en la figura. Probar que $YB \cdot YA = YC \cdot YD$.



7. En un estanque hay 100 litros de agua inicialmente. Se desea poner entre 2 y 6 desagües del mismo tamaño, por donde saldrá toda el agua lentamente. Se tienen 100 recipientes: uno con capacidad de 1 litro, otro con capacidad de 2 litros, otro con capacidad de 3 litros y así sucesivamente (el último tiene capacidad de 100 litros). Se quieren escoger algunos de estos recipientes y colocar uno en cada desagüe para recolectar agua (se escoge el mismo número de recipientes que de desagües). Se requiere que la suma de las capacidades de los recipientes escogidos sea 100. Aún cuando un recipiente se llena, el agua continúa saliendo por el desagüe y se tira. Determinar el número óptimo de desagües y las capacidades de los recipientes escogidos de tal manera que la suma de las capacidades de los recipientes **llenos** cuando se terminan los 100 litros sea máxima. (Nota: Sólo cuentan los recipientes que sí hayan sido llenados por completo, por ejemplo, si se colocan cuatro recipientes con capacidades 12, 20, 28 y 40, la cantidad de litros recolectados será de $12 + 20 = 32$).

8. ¿Cuál es la máxima longitud de un camino de A a B en la figura, si el camino debe seguir las líneas y no debe repetir ningún segmento (pero sí puede repetir vértices)?