Problemas Introductorios

para la

26ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Luis Miguel García Velázquez
María Luisa Pérez Seguí
Julio César Aguilar Cabrera
María Elena Aguilera Miranda

2012

Luis Miguel García Velázquez

Estudiante del Doctorado en Matemáticas,
Instituto de Matemáticas, UNAM

María Luisa Pérez Seguí

Profesora-Investigadora, Esc. Físico-Matemáticas,
Universidad Michoacana

Julio César Aguilar Cabrera

Investigador Asociado,
Laboratorio Nacional de Informática Avanzada (LANIA)

María Elena Aguilera Miranda

Estudiante del Doctorado en Matemáticas,
Instituto de Matemáticas, UNAM

Contenido

Presentación

La Sociedad Matemática Mexicana organiza la 26^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los ganadores formarán parte de las selecciones que participarán en las distintas olimpiadas internacionales del año 2013: la LIV Olimpiada Internacional a celebrarse en Colombia durante el mes de julio, la XXVIII Olimpiada Iberoamericana que se llevará a cabo en septiembre en Panamá y la XV Olimpiada de Centroamérica y el Caribe que tendrá lugar en Guatemala en el mes de julio.

En la 26^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas pueden participar los estudiantes de México nacidos después del 1^o de agosto de 1993. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2012-2013, y para el 1^o de julio del año 2013 no deberán haber iniciado estudios de nivel universitario.

En este folleto se incluyen problemas que aparecieron en las primeras etapas de la Olimpiada de Matemáticas con la idea de que este material sirva como orientación a los alumnos que desean participar por vez primera; como se puede ver, no se presentan ejercicios rutinarios ni problemas en los que se apliquen directamente los conocimientos que se adquieren en la escuela; éstos son problemas que requieren de una buena dosis de ingenio y de esfuerzo para ser resueltos. Como en todos los aspectos del aprendizaje de las matemáticas, el esfuerzo individual y el enfrentamiento solitario con los problemas son importantes, pero también es muy importante la discusión con los compañeros y los profesores.

Una forma de manifestar creatividad en matemáticas es resolviendo problemas. Otra forma, que en general requiere de más madurez, es inventándolos. Invitamos a todos los lectores de este folleto: profesores, estudiantes, olímpicos y exolímpicos a que nos envíen problemas junto con su solución. Las aportaciones serán consideradas para su inclusión en exámenes o en futuros folletos.

Los primeros treinta problemas que aparecen en esta publicación formaron parte del examen Canguro Matemático Mexicano y están pensados para ser resueltos en un lapso de tiempo de 3 horas, como examen eliminatorio. Los últimos treinta problemas corresponden a lo que podría ser una segunda etapa eliminatoria e incluyen una selección de los problemas que formaron parte de los exámenes aplicados en el Estado de México, San Luis Potosí, Zacatecas y otros niveles del Canguro Matemático Mexicano.

El presente folleto se edita a petición de profesores y miembros de varios comités estatales, por considerlo un recurso importante para el acercamiento de los alumnos a las primeras etapas de la olimpiada. En agradecimiento, el Comité Editorial dedica la presente publicación a todos ellos: a cuatro años de distancia de su última aparición, aquí están nuevamente los Problemas Introductorios.

Etapas de la Olimpiada

Como ya es tradición, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas consta de tres etapas:

Exámenes Estatales. Estos exámenes servirán para formar las selecciones estatales que asistirán al Concurso Nacional.

Concurso Nacional. Este concurso se llevará a cabo en el estado de Guanajuato del 11 al 17 de noviembre de 2012, y en él se elegirá a la preselección mexicana.

Entrenamientos. A los alumnos de la preselección que surjan del Concurso Nacional se les entrenará intensivamente durante el primer semestre del año 2013. También se aplicarán exámenes para determinar a los que representarán a México en las Olimpiadas Internacionales.

La participación en las tres etapas mencionadas es individual.

Durante el mes de abril se distribuyen los Exámenes del Canguro Matemático Mexicano, cuyo objetivo es acercar a los alumnos al tipo de matemáticas de la Olimpiada. Para participar en estos exámenes y obtener mayor información puedes visitar la página

`http://canguro.deltagauge.info/`

Resumen de Resultados

En el año de 1987 la Sociedad Matemática Mexicana organizó la Primera Olimpiada Mexicana de Matemáticas. A partir de esa fecha, los concursos nacionales se han celebrado anualmente en las ciudades de Xalapa, Hermosillo, Metepec, Guanajuato, Oaxtepec, La Trinidad, Acapulco, Guadalajara, Colima, Mérida, Monterrey, Querétaro, Oaxaca, Morelia, Oaxtepec, Colima, Ixtapan de la Sal, Campeche, Zacatecas, Saltillo, San Carlos, Campeche, Ensenada y San Luis Potosí.

Resultados de las Delegaciones que han representado a México

Los resultados de las Delegaciones Mexicanas en Olimpiadas Iberoamericanas, Internacionales y Centroamericana y del Caribe han sido los siguientes:

Olimpiada Internacional de Matemáticas			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1988	Australia	49	37
1989	Rep. Fed. de Alemania	50	31
1990	Rep. Popular de China	54	36
1991	Suecia	55	35
1992	Rusia	56	49
1993	Turquía	73	63
1994	Hong Kong	69	65
1995	Canadá	74	59
1996	India	75	53
1997	Argentina	82	32
1998	Taiwan	75	44
1999	Rumania	81	52
2000	Corea	82	30
2001	Estados Unidos	83	46
2002	Escocia	84	46
2003	Japón	82	41
2004	Grecia	84	37
2005	México	91	31
2006	Eslovenia	90	24
2007	Vietnam	92	37
2008	España	97	37
2009	Alemania	104	50
2010	Kasajistán	97	33
2011	Holanda	101	22

En 2011, todos los alumnos de la delegación que representó a México en la Olimpiada Internacional obtuvieron medalla. Ellos fueron: Flavio Hernández de Aguascalientes (plata), Diego Alonso Roque de Nuevo León (plata), Daniel Perales de Morelos (bronce), Manuel Alejandro Espinosa de Michoacán (bronce), Jorge Garza del Distrito Federal (bronce) y Georges Berlanger de Morelos (bronce). En total, en las Olimpiadas Internacionales se han obtenido 1 medalla de oro, 9 medallas de plata, 45 medallas de bronce y 29 menciones honoríficas.

Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1989	Cuba	13	3
1990	España	15	3
1991	Argentina	16	5
1992	Venezuela	16	6
1993	México	16	9
1994	Brasil	16	6
1995	Chile	18	9
1996	Costa Rica	17	2
1997	México	17	3
1998	República Dominicana	18	5
1999	Cuba	20	3
2000	Venezuela	21	2
2001	Uruguay	21	3
2002	El Salvador	22	3
2003	Argentina	19	4
2004	España	22	5
2005	Colombia	22	2
2006	Ecuador	21	1
2007	Portugal	22	4
2008	Brasil	21	6
2009	México	21	5
2010	Paraguay	21	3
2011	Costa Rica	21	1

Los cuatro integrantes de la delegación mexicana que participaron en la Olimpiada Iberoamericana de 2011 obtuvieron medalla: dos de oro (Diego Alonso Roque de Nuevo León y Flavio Hernández de Aguascalientes), una de plata (Jorge Garza del Distrito Federal) y una de bronce (José Ramón Guardiola de San Luis Potosí). En total, en las Olimpiadas Iberoamericanas México ha obtenido 20 medallas de oro, 36 medallas de plata, 28 medallas de bronce y 4 menciones honoríficas.

Olimpiada Centroamericana y del Caribe			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1999	Costa Rica	10	2
2000	El Salvador	9	2
2001	Colombia	10	2
2002	México	8	1
2003	Costa Rica	11	1
2004	Nicaragua	12	1
2005	El Salvador	12	1

Olimpiada Centroamericana y del Caribe (ii)			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
2006	Panamá	12	1
2007	Venezuela	12	1
2008	Honduras	12	2
2009	Colombia	12	1
2010	Puerto Rico	16	1
2011	México	12	1

En la XIII Olimpiada Mexicana de Centroamérica y el Caribe la delegación mexicana obtuvo tres medallas de oro (Juan Carlos Ortiz de Jalisco, Adán Medrano de Jalisco y Enrique Chiu del Distrito Federal) ubicándose así la delegación nacional en primer lugar por países. En total, en la Olimpiada Centroamericana y del Caribe, México ha obtenido 23 medallas de oro, 13 de plata y 3 de bronce.

Resultados en el Concurso Nacional de la 25a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas

En noviembre de 2011 se llevó a cabo en San Luis Potosí, San Luis Potosí, el 25º Concurso Nacional, con la participación de todos los estados de la República. Los 16 alumnos ganadores del primer lugar fueron:

José Ángel Sánchez Gómez (Baja California),
Alberto Manuel Astiazarán Tobín (Chihuaha),
Enrique Chiu Han (Distrito Federal),
Jorge Garza Vargas (Distrito Federal),
Ramón Iván García Álvarez (Guanajuato),
Marco Antonio Flores Martínez (Jalisco),
Jorge Ignacio González Cázares (Jalisco),
Adán Medrano Martín del Campo (Jalisco),
Juan Carlos Ortiz Rhoton (Jalisco),
Miguel Ángel Prado Godoy (Jalisco),
Diego Terán Ríos (Morelos),
José Alberto De la Paz Espinoza (Nayarit),
Diego Alonso Roque Montoya (Nuevo León),
Julio César Díaz Calderón (Oaxaca),
José Ramón Guardiola Espinosa (San Luis Potosí), y
José Ángel de Jesús Sosa Salinas (San Luis Potosí).

Los 11 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Centroamericana y del Caribe fueron:

Enrique Chiu Han (Distrito Federal),
Juan Carlos Ortiz Rhoton (Jalisco),
Miguel Ángel Prado Godoy (Jalisco),
Kevin William Beuchot Castellanos (Nuevo León),
Carlos Ignacio Carriera Ramírez (Colima),
Manuel Alejandro Ceballos Pech (Yucatán),
Diego Fajardo Rojas (Puebla),
Luis Xavier Ramos Tormo (Yucatán),
Olga Medrano Martín del Campo (Jalisco),
Diego Fajardo Rojas (Puebla), y
Siddharta Emmanuel Morales Guzmán (San Luis Potosı).

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado a cabo los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que ocuparon los primeros 10 lugares en el 25° Concurso Nacional:

1. Jalisco
2. Nuevo León
3. Yucatán
4. San Luis Potosí
5. Distrito Federal
6. Colima
7. Morelos
8. Guanajuato
9. Baja California
10. Querétaro

En esta ocasión, el premio a la Superación Académica fue ganado por la delegación de Nayarit. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon, respectivamente, Colima y Durango.

Material de estudio e información sobre la Olimpiada.

Para obtener más información sobre los eventos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas o para consultar más material de estudio, te invitamos a visitar el sitio de Internet:

`http://www.omm.unam.mx/`

EL COMITÉ ORGANIZADOR DE LA
OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS
Enero 2012

Enunciados de los problemas

En los problemas que presentamos a continuación se presentan cinco opciones para elegir la correcta. Al final encontrarás las soluciones.

Problema 1. En el Hotel Malasuerte los cuartos con número impar están todos del mismo lado del pasillo, empezando con el 1. El dueño es muy supersticioso, así que no quiso que ninguno de los cuartos tuviera un número que incluya al dígito 3. Si hay 15 cuartos en ese lado del pasillo, ¿qué número lleva el último cuarto?

(a) 29 (b) 41 (c) 43 (d) 45 (e) 47

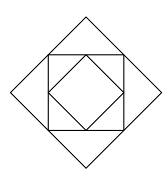
Problema 2. Un paso peatonal tiene franjas blancas y negras alternadas, cada una de ellas con 50 cm de ancho. Si el paso comienza y termina con una franja blanca y en total tiene 8 franjas de ese color, ¿cuál es el ancho total de la calle?

(a) 7 m (b) 7.5 m (c) 8 m (d) 8.5 m (e) 9 m

Problema 3. Mi reloj digital marca ahora las 20:11. ¿Dentro de cuántos minutos más mi reloj volverá a mostrar los dígitos 0, 1, 1 y 2, en algún orden?

(a) 40 (b) 45 (c) 50 (d) 55 (e) 60

Problema 4. El diagrama muestra tres cuadrados. El cuadrado mediano tiene como vértices los puntos medios del cuadrado grande. El cuadrado pequeño tiene como vértices los puntos medios del cuadrado mediano. El área del cuadrado pequeño es 6 cm^2. ¿Cuál es la diferencia entre las áreas del cuadrado pequeño y del cuadrado grande?

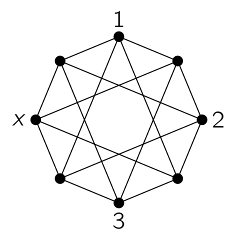


(a) 6 cm^2 (b) 9 cm^2 (c) 12 cm^2 (d) 15 cm^2 (e) 18 cm^2

Problema 5. ¿A cuánto es igual $\frac{2011*2.011}{201.1*20.11}$?

(a) 0.01 (b) 0.1 (c) 1 (d) 10 (e) 100

Problema 6. En cada uno de los vértices del octágono que se muestra en la figura se va a escribir el número 1, 2, 3 o 4, de forma que, si dos vértices están unidos por una línea, los números escritos en ellos no pueden ser iguales. ¿Cuáles números no pueden ir en el lugar de la x?



(a) 1, 2 y 3 (b) 1, 2 y 4 (c) sólo 2 (d) sólo 3 (e) sólo 4

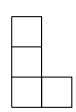
Problema 7. Mi abuelo fue de pesca por tres días. Cada día logró pescar más peces que el día anterior. El tercer día pescó menos que la suma de lo que pescó los dos primeros días. Si sumando lo de los tres días obtenemos 12 peces, ¿cuántos pescó el tercer día?

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8 (e) 9

Problema 8. De todos los números de tres cifras que cumplen que la suma de sus cifras es 8, se escogen el mayor y el menor. ¿Cuál es la suma de ellos?

(a) 707 (b) 907 (c) 916 (d) 1000 (e) 1001

Problema 9. El diagrama muestra una figura en forma de L formada por cuatro cuadritos. ¿De cuántas formas se puede agregar un cuadrito extra de manera que la figura resultante tenga un eje de simetría?

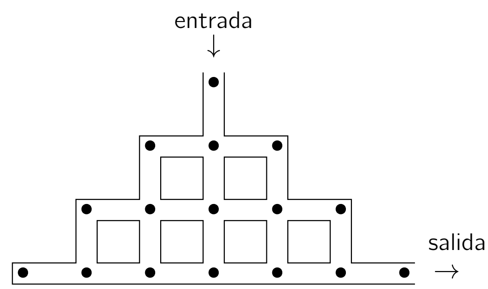


(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 5 (e) 6

Problema 10. Áurea tenía 9 perlas que pesan 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 gr. Mandó a hacer cuatro anillos con dos piedras cada uno; el peso de cada uno de los anillos es de 17, 13, 7 y 5 gr, respectivamente. ¿Cuánto pesa la perla que no se utilizó?

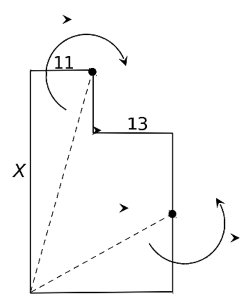
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 5 (e) 6

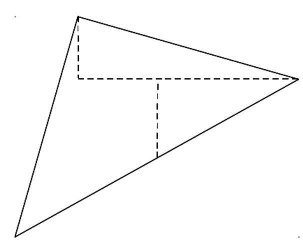
Problema 11. Una hormiga viaja al centro del hormiguero atravesando el sistema de túneles que se muestra en la figura, pero sin cruzar dos veces por la misma intersección. Si la hormiga encontró un grano de azúcar en cada una de las intersecciones que cruzó, ¿cuál es la mayor cantidad posible de granos que pudo haber recogido?



(a) 12 (b) 13 (c) 14 (d) 15 (e) 16

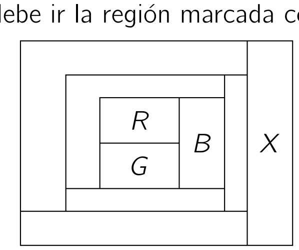
Problema 12. La figura de la izquierda está formada por dos rectángulos, uno de dimensiones 11 cm y X, el otro con un lado igual a 13 cm. Haciendo dos cortes y reacomodando las piezas como se muestra se obtiene un triángulo. ¿Cuál es la longitud del lado marcado con X?





(a) 36 cm (b) 37 cm (c) 38 cm (d) 39 cm (e) 40 cm

Problema 13. Cada región del diagrama se comenzó a pintar con uno de cuatro colores, según se indica con las letras en mayúsculas: rojo (R), gris (G), blanco (B) y amarillo (A). Sabiendo que dos regiones que se tocan deben tener colores diferentes, ¿de qué color debe ir la región marcada con X?

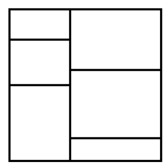


(a) Rojo (b) Blanco (c) Gris (d) Amarillo (e) No se puede determinar

Problema 14. Judith escribió en su libreta los números 17, 13, 5, 10, 14, 9, 12 y 16 y calculó su promedio; después tachó dos números de la lista y notó que el promedio era el mismo. ¿Cuáles son los números que tachó Judith?

(a) 12 y 17 (b) 5 y 17 (c) 9 y 16 (d) 10 y 12 (e) 14 y 10

Problema 15. Un cuadrado de papel se cortó en 6 piezas rectangulares, como se muestra en la figura. Si la suma de los perímetros de todas las piezas es 120 cm, ¿cuál es el área del cuadrado original?



(a) 48 cm^2 (b) 64 cm^2 (c) 110.25 cm^2 (d) 144 cm^2 (e) 256 cm^2

Problema 16. En total, durante los últimos tres partidos, el Morelia anotó 3 goles y recibió 1 gol. Si sabemos que el Morelia ganó un juego, empató otro y perdió otro, ¿cuál fue el resultado del partido que ganó?

(a) 2:0 (b) 3:0 (c) 1:0 (d) 2:1 (e) No se puede determinar

Problema 17. Alethia dibujó en su cuaderno un segmento de longitud 2 cm y le llamó A y B a sus vértices. ¿De cuántas maneras puede elegir ahora un punto C de forma que el triángulo ABC sea un triángulo rectángulo con área 1 cm^2.

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 6 (e) 8

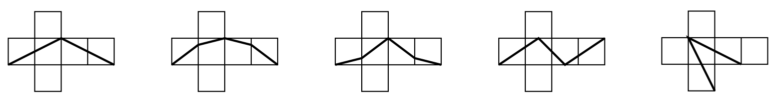
Problema 18. Sabiendo que a es un número positivo menor que 1 y que b es un número mayor que 1, ¿cuál es el mayor de los siguientes números?

(a) $a \times b$ (b) $a + b$ (c) $\frac{a}{b}$ (d) b (e) $a - b$

Problema 19. Citlali escribió un número de 5 cifras en el pizarrón y mostró que era múltiplo de 4, 5 y 9; después borró la tercera y la quinta cifras y escribió asteriscos en su lugar. Si lo que quedó escrito fue $24 * 8*$, ¿cuál es la suma de los números que borró?

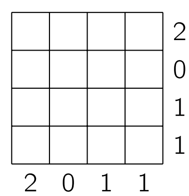
(a) 13 (b) 10 (c) 9 (d) 5 (e) 4

Problema 20. Usando el papel dibujado a la izquierda en la figura se construye (doblando y pegando) el cubo que se muestra a la derecha. En el cubo se dibuja una línea que divide la superficie del cubo en dos partes iguales y luego se desdobla el papel. ¿Cómo se ve la línea dibujada?



(a) (b) (c) (d) (e)

Problema 21. Algunas de las casillas de la cuadrícula que se muestra en la figura se van a colorear de negro. Junto a las columnas y a las filas se ha escrito la cantidad de casillas que deben quedar pintadas. ¿De cuántas formas diferentes se puede pintar la cuadrícula?

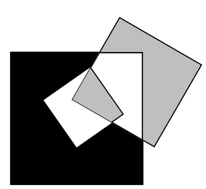


(a) 0 (b) 1 (c) 4 (d) 5 (e) 9

Problema 22. ¿Cuál es la suma de todos los enteros positivos n que dejan 15 como residuo al dividir 141 entre n?

(a) 15 (b) 53 (c) 126 (d) 141 (e) 270

Problema 23. En la figura, el cuadrado pequeño tiene lado 3, el mediano tiene lado 5 y el más grande tiene lado 7. ¿Cuál es la diferencia entre el área negra y el área gris?

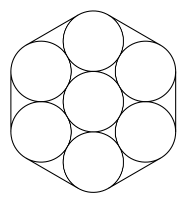


(a) 0 cm^2 (b) 10 cm^2 (c) 11 cm^2 (d) 15 cm^2 (e) No se puede determinar

Problema 24. En cada ronda de un torneo de voleibol los equipos se enfrentan por parejas y el ganador pasa a la siguiente ronda mientras que el perdedor queda eliminado (si el número de equipos es impar, uno de ellos pasa automáticamente a la siguiente ronda). El torneo sigue con estas reglas hasta que queda un solo equipo, que es el ganador. Si el número total de partidos es 100, ¿cuántos equipos había al principio?

(a) 101 (b) 200 (c) 2^7 (d) 2^6 (e) Falta información

Problema 25. En la figura se muestran 7 monedas tangentes con radio 1 cm y una liga que se ajustó a su alrededor. ¿Cuál es el largo de la liga?



(a) $6 + 4\pi$ cm (b) $12 + \pi$ cm (c) $12 + 2\pi$ cm (d) $6 + 2\pi$ cm (e) $9 + \pi$ cm

Problema 26. Aída le dispara a un tiro al blanco y le atina únicamente a las regiones que valen 5, 8 y 10 puntos. Si sabemos que acertó a la región del 8 tantas veces como a la región del 10, falló en el 25% de los tiros y en total obtuvo 99 puntos, ¿cuántos disparos hizo Aída en total?

(a) 10 (b) 12 (c) 16 (d) 20 (e) 24

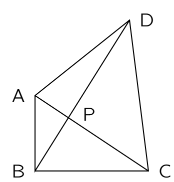
Problema 27. Néstor, Shaday y Fabiola están sentados en la misma fila del cine. Néstor dice: "Yo estoy a más del doble de distancia de Shaday que de Fabiola". Shaday dice: "Yo estoy a más del doble de distancia de Fabiola que de Néstor". Fabiola dice: "Yo estoy a más del doble de distancia de Shaday que de Néstor". Si sabemos que al menos dos de ellos dicen la verdad, ¿qué podemos concluir?

(a) Néstor miente
(b) Shaday miente
(c) Fabiola miente
(d) Ninguno miente
(e) Falta información

Problema 28. Hace siete años la edad de Andrea era un múltiplo de 8, pero en ocho años más su edad será un múltiplo de 7. Hace ocho años la edad de Francisco era un múltiplo de 7 y en siete años más su edad será un múltiplo de 8. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

(a) Francisco es dos años mayor que Andrea.
(b) Francisco es un año mayor que Andrea.
(c) Francisco y Andrea son de la misma edad.
(d) Francisco es un año menor que Andrea.
(e) Francisco es dos años menor que Andrea.

Problema 29. En la figura, las diagonales AC y BD del cuadrilátero $ABCD$ se intersectan perpendicularmente en el punto P. Si el área de ABC es 7, el área de BCD es 12 y el área de BPC es 5, ¿cuál es el área del cuadrilátero $ABCD$?



(a) 14 (b) 14.6 (c) 15.6 (d) 16 (e) 16.8

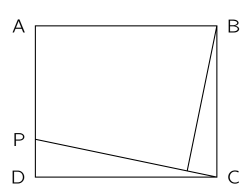
Problema 30. Encuentra la suma de todos los números x más pequeños que 100 tales que $x^2 - 81$ es un múltiplo de 100.

(a) 200 (b) 100 (c) 90 (d) 81 (e) 50

Problema 31. En un concurso cada participante inicia con 10 puntos y se le hacen 10 preguntas. Por cada respuesta correcta se suma un punto y por cada respuesta incorrecta se quita uno. Si Roberto terminó con 14 puntos, ¿cuántas respuestas incorrectas dio?

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 7

Problema 32. En la figura, $ABCD$ es un rectángulo, DC mide 120 cm, BC mide 100 cm y PC mide 125 cm. ¿Cuánto mide la altura del triángulo BPC que se ha dibujado en la figura?

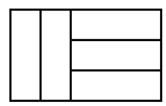


(a) 50 cm (b) 60 cm (c) 82 cm (d) 96 cm (e) No se puede calcular

Problema 33. ¿Cuántos números primos de dos cifras cumplen que la suma de sus dígitos es 11?

(a) 5 (b) 4 (c) 3 (d) 2 (e) 1

Problema 34. Hazell tiene cinco rectángulos iguales y con ellos forma un rectángulo más grande, como se muestra en la figura. Si el área del rectángulo grande es 60 cm^2, ¿cuánto mide el lado más chico de los rectángulos originales?

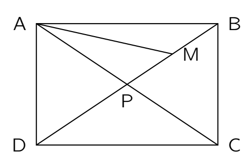


(a) 2 cm (b) 3 cm (c) 4 cm (d) 5 cm (e) 6 cm

Problema 35. ¿Cuántos números de 4 cifras se pueden escribir utilizando únicamente 1's y 2's de forma que resulten múltiplos de 3?

(a) 2 (b) 3 (c) 5 (d) 6 (e) Ninguno

Problema 36. En la figura $ABCD$ es un rectángulo, P es el punto de intersección de sus diagonales y M es el punto medio del segmento PB. Si la medida de AB es 4 cm y la de BC es 3 cm, ¿cuál es el área del triángulo ABM?



(a) $\frac{3}{4}$ cm^2 (b) 1 cm^2 (c) $\frac{3}{2}$ cm^2 (d) $\frac{5}{3}$ cm^2 (e) $\frac{5}{2}$ cm^2

Problema 37. En una clase hay 4 niñas. La maestra tiene 80 caramelos y 20 paletas para repartirlos entre sus alumnos. A cada uno de los estudiantes le entregó una paleta y guardó el resto en su escritorio. Después repartió todos los caramelos, dándole a cada una de las niñas del grupo un caramelo más de lo que le dio a cada uno de los niños. ¿Cuántos niños hay en el grupo?

(a) 14 (b) 15 (c) 16 (d) 17 (e) 18

Problema 38. Paola, Vanessa, Rodrigo, Humberto, Mauricio y Raúl se repartieron 6 tarjetas numeradas con números consecutivos. El número de la tarjeta de Paola es el doble del de la de Vanessa y tres veces la de Rodrigo; el número de Humberto es 4 veces el de Mauricio. ¿Qué número le tocó a Raúl?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

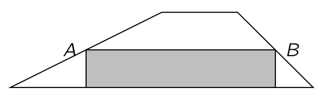
Problema 39. Ilse y Paulino cortaron a la mitad dos rectángulos iguales. Ilse obtuvo dos rectángulos con 40 cm de perímetro cada uno, mientras que Paulino obtuvo dos rectángulos con 50 cm de perímetro cada uno. ¿Cuál era el perímetro de los rectángulos originales?

(a) 40 (b) 60 (c) 80 (d) 100 (e) 120

Problema 40. Ivón pensó un número que, posteriormente, Vladimir multiplicó por 3 o por 4. Eric le sumó 1 o 3 al resultado de Vladimir, y después Yassiel dividió el resultado de Eric entre 4 o 5 y obtuvo 4. ¿Cuál es el número que pensó Ivón?

(a) 1 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 7

Problema 41. El rectángulo sombreado tiene área 13 cm^2, A y B son los puntos medios de dos de los lados del trapezoide, como se indica en la figura. ¿Cuál es el área del trapezoide?



(a) 22 cm^2 (b) 23 cm^2 (c) 24 cm^2 (d) 25 cm^2 (e) 26 cm^2

Problema 42. El domingo pasado 6 amigos nos reunimos para jugar al ajedrez. Al final del día, cada uno anotó en mi libreta la cantidad de contrincantes que tuvo. ¿Cuáles de las siguientes listas de números pueden haber quedado escritas en mi libreta?

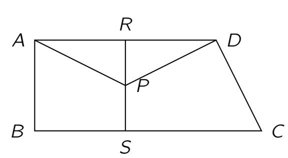
Lista 1: {1, 1, 2, 2, 3, 3}

Lista 2: {2, 2, 2, 2, 2, 2}

Lista 3: {2, 2, 2, 3, 3, 3}

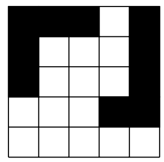
(a) Todas (b) Sólo 1 y 2 (c) Sólo 2 y 3 (d) Sólo 1 y 3 (e) Ninguna

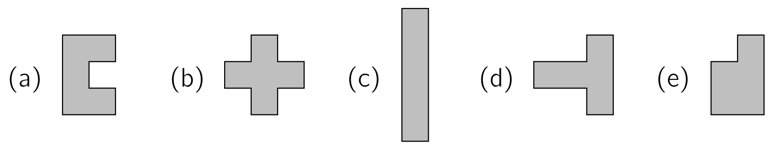
Problema 43. En la figura AB es perpendicular a BC, R es el punto medio de AD, RS es paralela a AB, P es el punto medio de RS, la longitud de AD es 4 y la de BC es 5. ¿Cuánto se obtiene al dividir el área del rectángulo $ABSR$ entre el área del cuadrilátero $PSCD$?



(a) 1 (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{4}{5}$ (d) $\frac{5}{7}$ (e) Falta información

Problema 44. En un tablero cuadriculado se pusieron dos piezas negras, como se muestra en la figura. Es posible colocar una de las piezas de abajo (de manera que quede completamente dentro del tablero y que no se encime con las negras) de forma que ninguna de las otras piezas puede ponerse. ¿Cuál es esa pieza?



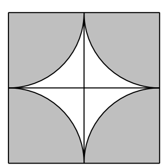


Problema 45. ¿Cuántos números de tres dígitos son tales que la suma de sus dígitos es par?

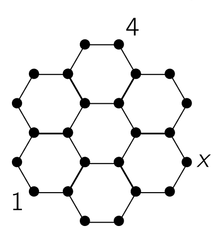
(a) 100 (b) 200 (c) 450 (d) 500 (e) 600

En los siguientes problemas deberás determinar la cantidad que se solicita. Al final encontrarás las respuestas.

Problema 46. Un piso rectangular de 8 m $\times$ 10 m está cubierto con mosaicos de 50 cm $\times$ 50 cm como el de la figura. ¿Cuál es el tamaño de la superficie del piso que es blanca?

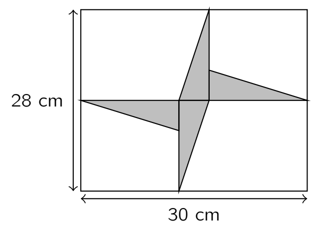


Problema 47. En la figura debe ir un número en cada uno de los vértices de manera que la suma de los números en los extremos de cada segmento sea la misma. Dos de los números ya se escribieron. ¿Qué número va en lugar de x?



Problema 48. En mi clase están inscritos la misma cantidad de hombres que de mujeres. El día de hoy faltaron 9 alumnas y 4 alumnos, y resultó que la tercera partes de los asistentes eran mujeres. ¿Cuántas mujeres vinieron hoy a clase?

Problema 49. Los cuatro triángulos rectángulos de la figura son iguales. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



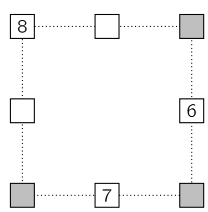
Problema 50. En cada cuadrito de la expresión

$$9 \square 15 \square 57 \square 77 \square 96$$

se va a escribir el símbolo $+$ o $-$. ¿Cuántas veces debe escribirse el símbolo $+$ para que el resultado sea 100?

Problema 51. Un rectángulo se partió en tres rectángulos; uno de ellos tiene lados con longitudes 7 y 11 cm; otro tiene lados que miden 4 y 8 cm. Si se sabe que el área es la mayor posible, ¿cuál es el área del tercer rectángulo?

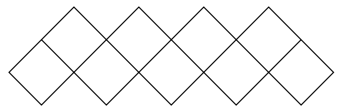
Problema 52. En la figura, Karla escribió 6, 7 y 8 en los cuadritos, según se muestra. Después escribirá los números 1, 2, 3, 4 y 5 en los cuadritos vacíos de forma que cada una de las sumas de los números en los lados del cuadrado punteado sea 13. ¿Cuál es la suma de los números que quedarán en los cuadritos sombreados?



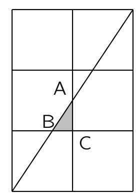
Problema 53. La maestra de historia quiere que durante el ciclo escolar los alumnos expongan temas en parejas. Cada tema debe ser preparado por 2 equipos distintos. Si en el grupo hay 10 estudiantes y cada uno de ellos participa en la misma cantidad de grupos, ¿cuál es el mínimo número de temas que la maestra debe repartir?

Problema 54. En una fábrica es posible producir una botella con material nuevo o reciclar 4 botellas usadas para hacer una nueva. Diariamente se venden 20 botellas y se recuperan todos los envases vacíos al día siguiente. Si se compra material para 1000 botellas, ¿cuántos días se podría producir sin necesidad de conseguir más material?

Problema 55. El siguiente zigzag está formado por cuadrados iguales, cada uno de ellos con lados que miden 20 cm. ¿Cuántos cuadrados debe tener un zigzag para que su perímetro sea 201.2 m?



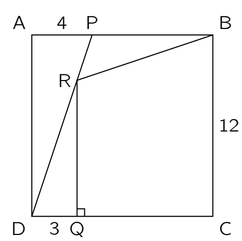
Problema 56. En la figura, si el lado de cada cuadrado mide 30 cm. ¿Cuánto mide el área del triángulo ABC?



Problema 57. Seis músicos participan en un festival de música. En cada concierto, algunos de esos músicos tocan y los demás escuchan. ¿Cuál es el mínimo número de conciertos necesario para que cada músico escuche a todos los demás?

Problema 58. Una máquina escribe unos y ceros de la siguiente manera: 10110111011110... Cada que escribe una cifra comprueba si es múltiplo de 6 y, en si ese es el caso, suena una campanilla. Si la máquina escribe 35 cifras, ¿cuántas veces sonará?

Problema 59. En la figura se muestra un cuadrado de lado 12, donde la longitud de AP es 4, la de DQ es 3 y el ángulo RQC es recto. ¿Cuánto mide RB?



Problema 60. Claudia y Adela están apostando para ver quién le pedirá el teléfono al chico que les gusta. Para decidirlo piensan lanzar dados. Si no sale ningún múltiplo de 3, Claudia lo hará, si sale exactamente un múltiplo de 3 lo hará Adela, y si salen dos o más múltiplos de 3 ninguna de los dos lo hará. ¿Cuántos dados deben lanzarse para que el riesgo sea el mismo para las dos?

Soluciones de los Problemas

Solución 1. Entre cada 10 números hay 4 impares que no terminan en 3. Eliminando los que llevan 3 antes de la última cifra, es fácil ver que al último cuarto le corresponde el número 47. La respuesta es (e).

Solución 2. En total, el paso tiene 8 franjas blancas y 7 franjas negras. La longitud de la calle es $(8+7)\cdot 50 = 750$ cm. La respuesta es (b).

Solución 3. Es imposible tener un acomodo distinto con los mismos dígitos que comience antes de las 21 horas; de hecho, la primera vez que los dígitos se repiten es a las 21:01. La respuesta es (c).

Solución 4. El cuadrado pequeño abarca la mitad del área del cuadrado mediano, que resulta igual a 12 cm^2. De la misma forma, el cuadrado mediano abarca la mitad del área del cuadrado grande, así que el área del grande es 24 cm^2 y la diferencia con el pequeño es de 18 cm^2. La respuesta es (e).

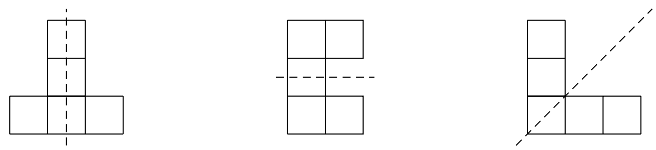
Solución 5. Tenemos que $\frac{2001*2.011}{201.1*20.11} = \frac{2001*\frac{2011}{1000}}{\frac{2011}{10}*\frac{2011}{100}} = 1$. La respuesta es (c).

Solución 6. En la figura, cualquiera de los vértices libres que no están marcados con x están conectados a vértices con 1, 2 y 3, así que en cada uno de ellos debe escribirse un 4. Dado que todos los vértices conectados con x tienen escrito un 4, en x se puede escribir cualquiera de 1, 2 o 3. La respuesta es (e).

Solución 7. Dado que el tercer día mi abuelo pescó menos que los otros dos ese día debió conseguir menos de la mitad de la docena de pescados, es decir que a lo mucho pescó 5. Dado que cada día pescó más que los anteriores el tercer día debió conseguir más de la tercera parte de la docena, es decir, 5 a lo menos. La respuesta es (a).

Solución 8. El número más pequeño es 107 y el más grade es 800, así que la suma es 907. La respuesta es (b).

Solución 9. En la figura se muestran las tres únicas soluciones:



La respuesta es (c).

Solución 10. La suma de los pesos de todas las perlas es 45g y el peso de las perlas usadas es $17 + 13 + 7 + 5 = 42$. La respuesta es (c).

Solución 11. Como la hormiga no puede cruzar dos veces la misma intersección, es claro que debe dejar un grano de azúcar en el nivel horizontal inmediato al de la entrada. El grano de azúcar que se encuentra en el último nivel a la izquierda no se puede recoger en ningún recorrido, pues no hay espacio para entrar y salir por él sin repetir la intersección. También es necesario dejar un grano de azúcar más en alguno de los últimos dos niveles horizontales para respetar la condición. Es fácil ver que hay un recorrido donde sí se recogen 13 granos. La respuesta es (b).

Solución 12. Al momento de realizar el doblez el lado X queda sobrepuesto sobre el segmento marcado en la figura con longitud 13 y la base inferior del rectángulo, que mide $11 + 13 = 24$, así que su longitud es $13 + 24 = 37$. La respuesta es (b).

Solución 13. Cada vez que vamos a colorear otra región podemos elegir una que tiene frontera con exactamente tres regiones ya iluminadas y que, por tal razón, tienen una sola opción de color posible. Procediendo de esta manera llegamos a que la región marcada con X debe ser Roja. La respuesta es (a).

Solución 14. El promedio de todos los números de la lista es 12, así que es necesario eliminar una pareja cuya suma sea 24. La respuesta es (e).

Solución 15. Al sumar los perímetros de todos los cuadrados obtendremos 10 veces la longitud del lado del cuadrado original (pues, por ejemplo, cada corte horizontal de un lado a otro cuenta dos veces el lado del cuadrado). De esta forma, cada lado del cuadrado mide 12 cm y el área del cuadrado es 144 cm^2. La respuesta es (d).

Solución 16. Es claro que el Morelia recibió el gol en el partido que perdió, así que en ese no anotó ninguno. En el partido que empató no recibió ningún gol, así que tampoco anotó ninguno en ése. De esta forma el marcador del partido que ganó es 3:0. La respuesta es (b).

Solución 17. El ángulo recto del triángulo puede estar en A, en B o en C, y el punto C debe estar en una paralela a distancia 1 de la recta AB. Para cada una de estas opciones hay dos elecciones posibles para el punto C (si pensamos que el segmento está dibujado de forma horizontal, hay una arriba y otra abajo del segmento). La respuesta es (d).

Solución 18. Usando que $a < 1$ y $b > 1$ tenemos que $a - b < 0 < \frac{a}{b} < a < a \times b < b < a + b$. La respuesta es (b).

Solución 19. Como el número es múltiplo de 4 y de 5, su última cifra debe ser 0. Como el número es múltiplo de 9 la suma de sus cifras debe ser un múltiplo de 9. Usando que la suma de las 4 cifras que conocemos es $2 + 4 + 8 + 0 = 14$, el único dígito que podría completar el número es el 4. La respuesta es (e).

Solución 20. Si desdoblamos el cubo de forma que todas las caras que están rayadas queden en una misma fila, empezando en una de las caras donde la línea dibujada toca un vértice de la tapa inferior obtendremos un arreglo semejante al del primer dibujo. Para convencernos de que ésta es la opción correcta basta con darnos cuenta de que la línea intersecta aristas siempre en sus extremos o en sus puntos medios. La respuesta es (a).

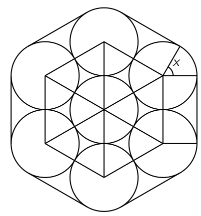
Solución 21. Hay tres formas distintas para elegir las casillas de la primera fila (no es posible usar la segunda casilla, puesto que no deben quedar casillas negras en esa columna). Para cada uno de los casos donde se elige la casilla superior izquierda es fácil ver que hay dos formas distintas de terminar el acomodo; hasta aquí hemos contado cuatro posibilidades. En caso de no haber elegido la primera casilla de la primera fila, la posición de todas las casillas ya queda determinada; esto nos agrega una opción más. La respuesta es (d).

Solución 22. Sabemos que n debe ser un divisor de $141 - 15 = 126$ que sea mayor a 15. Las posibilidades para n son 18, 21, 42, 63 y 126, así que la suma de todos es 270. La respuesta es (e).

Solución 23. Al sumar el área del cuadrado mediano con la del cuadrado pequeño obtenemos el área de ambos cuadrados sobrepuestos más el área de su intersección. Al restarle esa cantidad al área del cuadrado grande obtenemos justo la cantidad deseada, que es $49 - 9 - 25 = 15$. La respuesta es (d).

Solución 24. La cantidad de partidos es igual a la cantidad de equipos que son eliminados durante todo el torneo. Como queda un solo ganador al final del torneo, en total hay 101 equipos. La respuesta es (a).

Solución 25. Cada segmento de recta en el perímetro mide 2cm (ver la figura) y el ángulo x mide $360^o - (90^o + 60^o + 60^o + 90^o) = 60^o$. Entonces la liga mide $6(2 + \frac{2\pi}{6}) = 12 + 2\pi$.



La respuesta es (c).

Solución 26. Llamemos a a la cantidad de tiros que acertaron a 8 puntos (o a 10) y b a los que acertaron a 5 puntos. Tenemos que $(10+8)a + 5b = 18a + 5b = 99$. Como 99 y 18 son múltiplos de 9, también lo debe ser b; por otro lado, también observamos que b debe ser impar ya que $5b$ sumado con un par ($18a$) es impar (99). Es claro entonces que b debe ser 9 y entonces $a = 3$. Como esos $9 + 3 + 3 = 15$ tiros acertados fueron el 75% del total, tenemos que Aída hizo 20 disparos. La respuesta es (d).

Solución 27. Shaday no puede estar sentada entre sus dos amigos, ya que tanto Fabiola como Néstor afirman estar más cerca uno del otro que de ella y sabemos que ambos no pueden estar mintiendo. Si suponemos que Shaday dice la verdad entonces Néstor debe estar sentado entre sus dos amigas, pero más cerca de Shaday, lo cual contradice directamente la afirmación de Néstor. Además, Fabiola tampoco puede estar diciendo la verdad, puesto que la distancia entre ella y Shaday es la suma de la distancia entre Shaday y Néstor y la distancia entre Néstor y Fabiola; como la primera es menor que la segunda no puede resultar menor que el doble de la segunda. Con este supuesto tendríamos que Fabiola y Néstor estarían mintiendo, puesto que los dos afirman estar a más del doble de Shaday que uno del otro, lo cual no es posible. La respuesta es (b).

Solución 28. Denotemos por A la edad de Andrea y F la edad de Francisco. De las afirmaciones se puede deducir que tanto A+1 como F-1 son múltiplos de 7 y de 8 al mismo tiempo. Como el único múltiplo común de 7 y 8 que corresponde al rango de edad de un humano es 56, tenemos que Andrea tiene 55 años, Francisco tiene 57 y por tanto es dos años mayor que Andrea. La respuesta es (a).

Solución 29. Denotemos por (XYZ) el área de la figura XYZ. Tenemos

$$2 = (ABP) = \frac{BP \cdot AP}{2} \quad \text{y} \quad 5 = (BPC) = \frac{BP \cdot PC}{2},$$

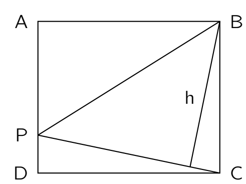
así que $PC = \frac{5}{2}AP$ y entonces $(APD) = \frac{2}{5} \cdot 7 = \frac{14}{5} = 2.8$. El área total es $2 + 5 + 7 + 2.8 = 16.8$. La respuesta es (e).

Solución 30. *Primera forma.* Los números deben terminar en 1 o en 9 para que su cuadrado termine en 1. Si $x = 10b + 1$, entonces $x^2 = 100b^2 + 20b + 1$, así que $20b$ debe terminar en 80, o sea que $2b$ debe terminar en 8; esto se logra con $b = 4$ y con $b = 9$. Si $x = 10b + 9$, entonces $x^2 = 100b^2 + 180b + 81$, así que $180b$ debe terminar en 00; o sea que $18b$ debe terminar en 0; esto se logra con $b = 0$ y con $b = 5$. Los números son 9, 41, 59 y 91, y su suma es 200.

Segunda forma. Si x^2 termina en 81, entonces también lo hace $(100-x)^2$. Como $x^2 - 81 = (x-9)(x+9)$ es múltiplo de 100 y $x - 9$ y $x + 9$ son de la misma paridad, tenemos que ambos deben ser pares y alguno de ellos debe ser múltiplo de 25. Las únicas opciones son $x-9 = 0$, $x-9 = 50$, $x+9 = 50$ o $x+9 = 100$. La respuesta es (a).

Solución 31. Dado que Roberto solamente obtuvo 4 puntos extras (dando respuestas correctas) sabemos que 6 de los puntos obtenidos en las preguntas se anularon entre sí, lo cual implica que 3 de esas respuestas fueron incorrectas. La respuesta es (a).

Solución 32. El área del triángulo BPC es la mitad del área del rectángulo total, es decir, $\frac{100 \cdot 120}{2} = 6000$ cm^2. Así, $\frac{125 \cdot h}{2} = 6000$, de donde obtenemos que h mide 96 cm.



La respuesta es (d).

Solución 33. Las únicas opciones posibles para las cifras son 2 y 9, 8 y 3, 7 y 4, y 6 y 5; los únicos números primos que se puede formar con ellas son 29, 83 y 47. La respuesta es (c).

Solución 34. Llamemos a al lado menor y b al lado mayor de cada uno de los rectángulos originales. El área del rectángulo mayor es 5 veces el área de los rectángulos originales, así que $5ab = 60$ y $ab = 12$. Calculando de otra forma el área del rectángulo mayor, tenemos que $b(a + a + b) = 2ab + b^2 = 60$, sustituyendo el valor de ab en esa ecuación obtenemos que $b = 6$. De la primera ecuación resulta que $a = 2$. La respuesta es (a).

Solución 35. Como las únicas cifras utilizadas son 1 y 2 tenemos que la suma de las cifras debe ser un número entre 4 y 8; como además debe ser un múltiplo de 3, tenemos que la suma de las cifras del número debe ser 6. Si en el número utilizamos la cifra 2 una sola vez la suma resulta menor que 6, pero si la usamos tres veces o más la suma resulta mayor que 6. Es fácil convencerse que sólo hay 6 formas distintas de construir un número en estas condiciones utilizando exactamente dos cifras 2. La respuesta es (d).

Solución 36. La longitud de BM es la cuarta parte de la longitud de BD, así que el área del triángulo ABM es la cuarta parte del área del triángulo ABD, es decir $\frac{1}{4} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{3}{2}$ cm^2. La respuesta es (c).

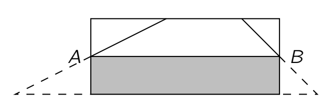
Solución 37. La maestra repartió 4 dulces de más, así que los 76 restantes los repartió de forma equitativa. La cantidad de estudiantes debe ser un divisor de 76 que sea mayor que 4 (sabemos que hay 4 niñas) y menor que 20 (sabemos que sobraron paletas), así que debe ser 19. La respuesta es $19 - 4 = 15$. La respuesta es (b).

Solución 38. Los números de las tarjetas son consecutivos. Si el número de Mauricio es mayor o igual que 2 tendríamos que el número de Humberto debe ser mayor o igual a 8, lo cual no puede ser (pues los números de las tarjetas son 6 números consecutivos). Así, el número en la tarjeta de Mauricio es 1, el de Humberto es 4 y los demás son números menores o iguales a 6. La tarjeta de Paola tiene un número múltiplo de 2 y 3, así que le tocó el 6, en consecuencia Vanessa debe tener el 3 y Rodrigo el 2. El número que hace falta para completar los números del 1 al 6 es el 5, que debió tocarle a Raúl. La respuesta es (d).

Solución 39. Supongamos que Ilse hizo el corte a lo ancho del rectángulo, mientras que Paulino lo hizo a lo largo. Si sumamos el perímetro de todos los rectángulos ya recortados obtendremos el perímetro de los dos rectángulos originales más dos veces el ancho (por lo que se agregó cuando Ilse hizo su corte) y dos veces el largo (por lo que se agregó cuando Paulino hizo su corte), es decir, obtendremos 3 veces el perímetro de los rectángulos originales. Así, el número que estamos buscando es $\frac{2(40)+2(50)}{3} = 60$. La respuesta es (b).

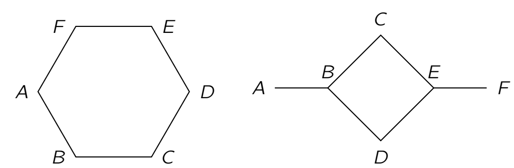
Solución 40. El resultado de Eric debió ser 16 o 20. Dado que Eric le sumó 1 o 3 al resultado anterior, el número que obtuvo Vladimir podría haber sido 13, 15, 17 o 19 pero, considerando que debe ser un múltiplo de 3 o de 4, tenemos que su resultado debió ser 15. El número que Ivón pensó fue 5. La respuesta es (c).

Solución 41. Si recortamos los triángulos que quedan a los lados del rectángulo y los ponemos arriba obtenemos un rectángulo con la misma área del trapezoide original; así el área buscada es el doble de la del rectángulo sombreado.



La respuesta es (e).

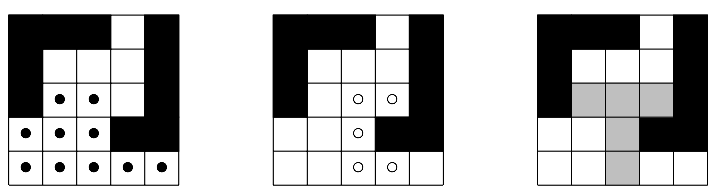
Solución 42. La suma de los números en la lista es el doble de las partidas que se llevaron a cabo, así que debe ser un número par. Teniendo eso en cuenta es claro que la Lista 3 no puede ser la que quedó en mi libreta. Si llamamos A, B, C, D, E y F a los participantes y dibujamos una línea entre dos participantes para indicar un juego, la siguiente figura muestra que las otras opciones son posibles:



La respuesta es (b).

Solución 43. Dado que R es el punto medio de AD tenemos que RD y AR miden 2. Como $ABSR$ es un rectángulo, tenemos que BS mide 2 y SC mide $5 - 2 = 3$. Llamemos h a la longitud de AB. El área del rectángulo $ABSR$ es $2 \cdot h$, mientras que el área del cuadrilátero $PSCD$ es igual al área del trapecio $RSCD$ menos el área del triángulo RPD, es decir, $\frac{(3+2)\cdot h}{2} - \frac{2\cdot\frac{h}{2}}{2} = 2h$. De esta forma, obtenemos que las áreas que estamos comparando miden lo mismo. La respuesta es (a).

Solución 44. El único lugar donde puede ir la pieza (c) es abajo, horizontalmente; es claro que si ella se coloca, entonces (a) todavía cabe, así que (c) no es la respuesta. Como debemos buscar que (c) no pueda acomodarse, debemos invadir el último renglón. Si se pone (a) usando sólo algunos de los cuadros marcados con $\bullet$ en la figura todavía se puede acomodar (d) y, si se pone usando los cuadros marcados con $\circ$, entonces cabe (e); de esta manera vemos que (a) tampoco es la respuesta. Por la misma razón, tampoco (b) ni (e) son la respuesta. Sin embargo, al acomodar (d) en las casillas sombreadas ya ninguna otra cabe.

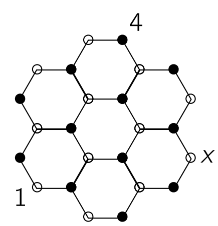


La respuesta es (d).

Solución 45. Dada cualquier elección de los dígitos a y b, hay 10 opciones para completar el número; dependiendo de si $a + b$ es par o impar, la mitad de las opciones posibles completa un número como el que andamos buscando. De esta forma, hay 90 números *ab* con 5 opciones para completarse, cada uno, dando un total de $90 * 5 = 450$ números diferentes. La respuesta es (c).

Solución 46. El área del mosaico es de $.5 \times .5 = .25$ m^2, de los cuáles el área gris corresponde al área de un círculo con radio .25, es decir, $\pi(.25)^2 = .0625\pi$ m^2; y entonces el área blanca de cada mosaico es $.25 - .0625\pi$ m^2. El área total del piso es de 80 m, así que podemos acomodar $\frac{80}{.25} = 320$ mosaicos. El área que estamos buscando es $320(.25 - .0625\pi) = 80 - 20\pi$ m^2.

Solución 47. Cuando dos segmentos tienen un punto en común, los otros extremos deben tener el mismo valor; de esta manera, los puntos marcados con $\bullet$ deben llevar el número 4 y los demás deben llevar el número 1.

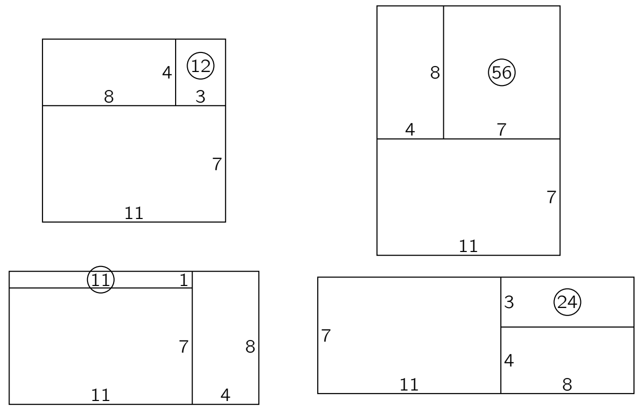


Solución 48. En clase hoy un tercio de los asistentes son mujeres y dos tercios son hombres, es decir, hay el doble de hombres que de mujeres. Como sabemos que hoy vinieron 5 hombres más que mujeres, tenemos que asistieron 5 mujeres en total.

Solución 49. Como la altura del rectángulo es de 28 cm, el cateto más largo de los triángulos debe medir 14 cm. Como la longitud horizontal del rectángulo se cubre con dos de esos catetos y uno corto, tenemos que este último debe medir $30 - 2(14) = 2$ cm. El área es $4 \cdot (\frac{2 \cdot 14}{2}) = 56$ cm^2.

Solución 50. Si el signo antes de 96 fuera negativo tendríamos que el resultado de la expresión previa debería ser 196, lo cual es imposible ya que el mayor resultado que se puede obtener es $9+15+57+77 = 156$; así, el signo antes de 96 debe ser positivo. Observemos que al quitar el 9 y el 96 el resultado de la expresión restante debe ser -5. Si el signo antes del 15 es negativo debemos obtener 10 sumando o restando 57 y 77, lo cual es imposible. Ahora, como el signo antes del 15 es positivo y, como debemos obtener -20 sumando o restando 57 y 77, la única posibilidad es que el signo antes de 77 sea negativo y el signo antes de 57 sea positivo. Por lo tanto, para obtener 100 como resultado de la expresión es necesario escribir exactamente 3 veces el símbolo $+$.

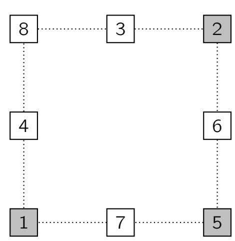
Solución 51. Fijemos el rectángulo de 11×7 y analicemos las 4 distintas posibilidades de si el lado de longitud 4 o el lado de longitud 8 va junto al del lado de longitud 11 o al de 7.



El área del rectángulo es 56 cm^2.

Solución 52. Primera forma. La suma de todos los números del 1 al 8 es 36. La suma del los números de los lados que tienen al 8 es $13 + 13 - 8 = 18$, así que el número que está en contraesquina del 8 debe ser $36 - 18 - 6 - 7 = 5$. Fijándonos en los lados que tienen al 5, la suma de los números en los cuadrados grises debe ser $13 + 13 - 6 - 7 - 5 = 8$.

Segunda forma. En los dos lados que contienen al 8 los números deben sumar 5, así que deben ser 2 y 3 en uno de los lados, mientras que en el otro deben ser 1 y 4. El 3 y el 4 no pueden estar en el mismo lado que el 6 o el 7 porque el 1 y el 2 ya no pueden usarse en la esquina de abajo a la derecha. Es claro entonces que el 2 va arriba del 6 y el 1 va a la izquerda del 7. Los cuadritos se completan como indica la figura:



Solución 53. Sea t la cantidad de temas que se distribuyeron. Hagamos que cada estudiante escriba en el pizarrón el tema que le corresponde; como cada tema se le asignó a 2 equipos, sabemos que será escrito 4 veces. Cada estudiante está en la misma cantidad de equipos, así que $4 \cdot t$ debe ser un múltiplo de 10. El menor valor posible de t para que eso suceda es 5.

Nos hace falta mostrar que es posible organizar las exposiciones con 5 temas, cumpliendo las reglas. Una manera de hacerlo es formar 5 parejas y asignarle a cada una dos temas distintos. Esto se puede hacer como se indica en la siguiente tabla:

Equipo 1	*Equipo 2*	*Equipo 3*	*Equipo 4*	*Equipo 5*
Tema 1	Tema 2	Tema 3	Tema 4	Tema 5
Tema 5	Tema 1	Tema 2	Tema 3	Tema 4

Solución 54. Cada día se recuperan 20 botellas, que es el equivalente a 5 botellas nuevas; esto quiere decir que el material que se pierde diariamente es el equivalente a 15 botellas. De esta manera la compra de material alcanzará para trabajar 66 días, que es el entero que resulta al dividir 1000 entre 15. Ese último día habrá material para producir 10 botellas más, pero eso sería insuficiente para completar la producción del día siguiente si no se realiza una nueva compra.

Solución 55. Los dos cuadraditos en los extremos del zigzag aportan 1.20 m al perímetro, de los 200 metros restantes, cada cuadradito del interior aporta 40 cm, así que en total debe haber $\frac{200}{.4} = 500$. En total, debe haber 502 cuadritos en el zigzag.

Solución 56. La diagonal y la recta que pasa por A y C se intersectan en sus puntos medios, así que la longitud de AC es 15 cm. Por otra parte, observemos que el triángulo ABC es semejante al triángulo que queda bajo la diagonal del rectángulo con razón $\frac{15}{90} = \frac{1}{6}$ entre sus lados; de aquí obtenemos que $BC = 60(\frac{1}{6}) = 10$ y el área del triángulo ABC es $\frac{15\cdot 10}{2} = 75$ cm^2.

Solución 57. Llamemos A, B, C, D, E y F a los músicos. Si en ningún concierto tocan dos músicos al mismo tiempo se necesitaría un mínimo de 6. Si en un concierto tocan dos músicos al mismo tiempo, digamos A y B, necesitaremos dos conciertos más para que A pueda escuchar a B y B pueda escuchar a A. Por otra parte, si C es espectador en el primer concierto, necesitaremos un concierto más para que A y B puedan escucharlo; con esto tenemos un mínimo de 4 conciertos. El siguiente programa de conciertos muestra que 4 son suficientes para cumplir las condiciones del problema:

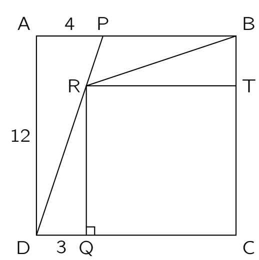
Concierto 1	A	B	C
Concierto 2	B	E	D
Concierto 3	A	E	F
Concierto 4	C	F	D

Solución 58. Siempre que la máquina suena la última cifra que acaba de escribir es un 0, puesto que el número completo debe ser par. Las únicas posiciones que tienen 0 son la 2, la 5, la 9, la 14, la 20, la 27 y la 35. Para que el número sea múltiplo de 3, es necesario que tenga una cantidad de 1's que sea múltiplo de 3, para verificar cuáles números cumplen es suficiente con ir completando la siguiente tabla:

No. de cifras	No. de 1's	¿Suena?
2	1	NO
5	1+2	SI
9	1+2+3	SI
14	1+2+3+4	NO
20	1+2+3+4+5	SI
27	1+2+3+4+5+6	SI
35	1+2+3+4+5+6+7	NO

La máquina sonará en total 4 veces.

Solución 59. En la figura, $\angle RTC = 90^o$. Los triángulos PDA y DRQ son semejantes, así que $\frac{12}{4} = \frac{DA}{PA} = \frac{RQ}{DQ} = \frac{RQ}{3}$, de donde $RQ = 9$. Entonces $BT = 12 - 9 = 3$ y, como $RT = 12 - 3 = 9$, por Pitágoras $RB = \sqrt{9+81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$.



Solución 60. Hay 2 números múltiplos de tres y 4 que no lo son, así que tirar el dado una sola vez no sería justo. Si se lanza el dado dos veces, tendríamos que hay $4 \times 4 = 16$ formas posibles para que Adela gane, al tiempo que Claudia podría ganar de $2 \times 4 + 4 \times 2 = 16$ formas, también. Analizando las posibilidades cuando el lado se lanza más veces, es claro que las posibilidades de ganar de Claudia son siempre mayores que las de Adela. En conclusión, el lado debe lanzarse 2 veces para que el riesgo sea el mismo para ambas.

Concentrado de Respuestas

1.	(e)	16.	(b)	31.	(a)	46.	$80 - 20\pi$
2.	(b)	17.	(d)	32.	(d)	47.	1
3.	(c)	18.	(b)	33.	(c)	48.	5
4.	(e)	19.	(e)	34.	(a)	49.	56
5.	(c)	20.	(a)	35.	(d)	50.	3
6.	(e)	21.	(d)	36.	(c)	51.	56
7.	(a)	22.	(e)	37.	(b)	52.	8
8.	(b)	23.	(d)	38.	(d)	53.	5
9.	(c)	24.	(a)	39.	(b)	54.	66
10.	(c)	25.	(c)	40.	(c)	55.	502
11.	(b)	26.	(d)	41.	(e)	56.	75
12.	(b)	27.	(b)	42.	(b)	57.	4
13.	(a)	28.	(a)	43.	(a)	58.	4
14.	(e)	29.	(e)	44.	(d)	59.	$3\sqrt{10}$
15.	(d)	30.	(a)	45.	(c)	60.	2

Información de Contacto

Olimpiada Mexicana de Matemáticas:
Cubículo 201, Departamento de Matemáticas
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
Ciudad Universitaria
Colonia Copilco, Código Postal 04510, Delegación Coyoacán
México, Distrito Federal
Teléfono: (55) 5622-4864
Fax: (55) 5622-5410
Correo electrónico: `omm@fciencias.unam.mx`
Sitio Web: `http://www.omm.unam.mx/`

Búscanos en Facebook.

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

José Antonio Gómez Ortega
(Presidente)

Ignacio Barradas Bribiesca

Irving Daniel Calderón Camacho

Fernando Campos García

José Alfredo Cobián Campos

David Cossío Ruiz

Luis Cruz Romo

José Antonio Climent Hernández

Marco Antonio Figueroa Ibarra

Samantha Lizette Flores López

Luis Miguel García Velázquez

María Eugenia Guzmán Flores

Jesús Jerónimo Castro

Eréndira Jiménez Zamora

María Luisa Pérez Seguí

Leonardo Martínez Sandoval

Miguel Raggi Pérez

Olga Rivera Bobadilla

Carlos Jacob Rubio Barrios

Elena Ruiz Velázquez

David Guadalupe Torres Flores

Rogelio Valdez Delgado

Rita Vázquez Padilla

Eduardo Velasco Barreras

Hugo Villanueva Méndez.