

ETAPA SEMIFINAL ESTATAL DE LA 20^a OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

Tiempo límite: 4 horas.

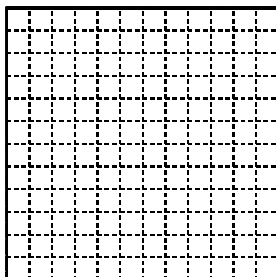
Escribe todos los razonamientos.

No puedes usar calculadora.

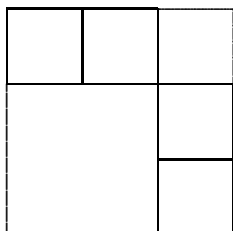
Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas distintas.

Puedes preguntar por escrito las dudas que tengas sobre los enunciados de las preguntas del examen.

1. En una cuadrícula de 12×12 las líneas de la orilla son continuas y las interiores son punteadas, como se muestra. Luis y Miguel van a jugar un juego sobre el tablero. En su turno Luis escoge alguna línea horizontal punteada y la remarca desde una orilla de la cuadrícula hasta la otra (es decir, hace continua la horizontal completa de longitud 12), después Miguel escoge una línea vertical punteada y la remarca (también toda la línea de longitud 12). Empieza Luis y después van alternando turnos escogiendo siempre líneas todavía punteadas (Luis siempre escoge horizontales y Miguel siempre escoge verticales). Gana el primero que logre formar, con las líneas continuas, un cuadrado de 1×1 . Si los dos jugadores juegan inteligentemente, ¿cuál de ellos puede garantizar que va a ganar, y cómo debiera jugar para asegurar su triunfo?



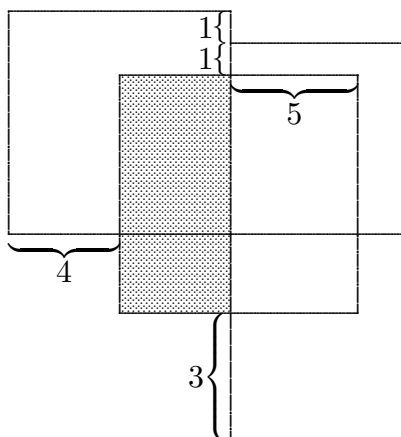
2. ¿De cuántas formas es posible numerar del 1 al 6 todas las casillas de la figura de manera que no haya un par de casillas vecinas cuya resta sea múltiplo de 3? (Nota: Dos casillas que comparten sólo una esquina no se consideran vecinas.)



3. Encuentra todas las parejas de primos positivos p y q que satisfacen la siguiente ecuación

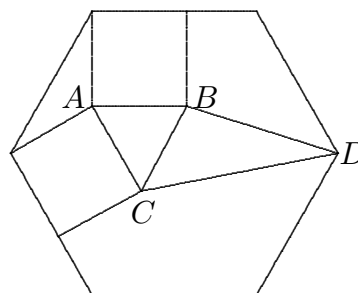
$$p^q + q^p = 2^{q+1} + 1.$$

4. En la figura se ha dibujado un cuadrado encima de otros tres. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



5. En el hexágono regular de la figura, cada lado mide $\sqrt{3}$ y se dibujaron dos cuadrados sobre los lados, como se muestra.

- (a) Probar que el triángulo ABC es equilátero.
 (b) Encontrar la medida de los lados de los cuadrados.
 (c) Probar que el área del triángulo BCD es $\frac{5-\sqrt{3}}{4}$.



6. En el tablero de 3×3 de la figura se va a jugar un juego. Un movimiento permitido consiste en escoger uno de los cuadrillos y cambiar de color (negro a blanco, y blanco a negro) todos los que están pegados a él, ya sea en diagonal o compartiendo un lado (el cuadrillo elegido no cambia de color). Determinar si es posible, mediante movimientos permitidos, lograr que todos los cuadros de la figura dada queden del mismo color.

