# RESPUESTAS PARA EL EXAMEN SEMIFINAL DE LA 15a OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

1. (i) Porque $2001 \times 3$ es impar y éste número cuenta dos veces el número de saludos (en cada saludo intervienen dos personas).
   (ii) 82 personas, pues $\frac{82 \times 3}{2} = 123$.

2. La única posibilidad es $B = 15$, $C = 30$, $D = 450$ y $E = 13\,500$. Para ver esto, observemos que $6\,075\,000 = 2^3 \times 3^5 \times 5^5$. De aquí es claro que $B$ debe tener en su factorización prima al menos un 3 y un 5. Es fácil comprobar que con $B = 15$ (y los valores que determina $B$ para $C$, $D$ y $E$) se cumple el resultado. Otra forma de obtener $B$ es dándose cuenta que $C = 2B$, $D = 2B^2$, $E = 4B^3$ y $F = 8B^5$. Usando la factorización $6\,075\,000 = 2^3 \times 3^5 \times 5^5$ se despeja $B$.

3. El área es $\frac{2001}{2}$. Hay muchas maneras de llegar a este resultado. Podemos, por ejemplo, observar que el triángulo $AFE$ tiene la misma área que el triángulo $AOE$, donde $O$ es el centro del círculo. Entonces el área de $AFE$ es $\frac{2001}{6}$. Por otro lado, el triángulo $EFP$ es igual al triángulo $EFB$ puesto que $CE \,||\, BF$ y $AF \,||\, BE$ y así $BEPF$ es un paralelogramo. Entonces, el área de $FEP$ es $\frac{2}{6}2001$.

4. Sólo es posible para $n = 2$. Es claro que para éstos es posible. Para $n \geq 3$ dentro del triángulo se forman algunos hexágonos y entonces es posible encontrar 6 triangulitos todos vecinos entre sí. Como sólo hay 5 posibles residuos, no hay forma de asignar a esos triangulitos números con residuos todos distintos.

5. Las casillas con número múltiplo de 4. Para ver esto oservemos lo siguiente. En cualquier momento la pulga puede llegar a la casilla 128 si salta en sentido apropiado. Sin embargo, si va en el otro sentido y está en una casilla $a$, al terminar el salto estará en la casilla $2a$ o en la casilla $2a - 128$. Notemos también que en el momento que la pulga llegue a la casilla 128, sin importar en qué dirección salte, ya siempre quedará en esa casilla. Ahora, llamemos $i$ al número de la casilla donde la pulga empieza. Buscamos que $2^5 i$ sea múltiplo de $128 = 2^7$, así que $i$ debe ser múltiplo de 4.

6. Se ilustran dos formas distintas de llenar los cubitos. En la primera se pone un 1 por cada dirección y se rellena con $0'$s (sólo se escribieron los $1'$s, para simplificar):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| | 1 | | | |
| | | 1 | | |
| | | | 1 | |
| | | | | 1 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | 1 |
| 1 | | | | |
| | 1 | | | |
| | | 1 | | |
| | | | 1 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | |
| | | | | 1 |
| 1 | | | | |
| | 1 | | | |
| | | 1 | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | | |
| | | | 1 | |
| | | | | 1 |
| 1 | | | | |
| | 1 | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | | | |
| | | 1 | | |
| | | | 1 | |
| | | | | 1 |
| 1 | | | | |

En la segunda, se ponen $1'$s y $-1'$s alternadamente en las 8 esquinas del cubo grande y se rellena también con $0'$s (sólo se escribieron los $1'$s, para simplificar):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | −1 |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| −1 | | | | 1 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| −1 | | | | 1 |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| 1 | | | | −1 |

7. 27 es la única posibilidad. Sea $N = abcd$ el número buscado, con $a$, $b$, $c$ y $d$ sus cifras. Sabemos que $N = 3(a+b+c+d)$. que $a \leq 2$ y que $b, c, d \leq 9$, así que $N \leq 3(2+9+9+9) = 87$. De esta manera el problema se simplifica considerablemente pues $a = b = 0$ y $c \leq 8$. De aquí podemos proceder de distintas maneras: La primera es repitiendo el procedimiento varias veces: $N \leq 3(8+9) = 51$, por tanto $c \leq 5$; entonces $N \leq 3(5+9) = 42$; otra vez, $N \leq 3(4+9) = 39$, $N \leq 3(3+9) = 36$. De aquí ya es fácil analizar todos los múltiplos de 3 (pues $N$ lo es) y ver que sólo $N = 27$ cumple la condición. Otra forma de resolver el problema una vez que sabemos que $N$ tiene sólo dos cifras es: $N = 10a + b = 3(a+b)$, de donde $7a = 2b$. Entonces $b$ tiene que ser múltiplo de 7 y, como es un dígito, debe ser 7. Entonces $a = 2$. Una tercera forma de proceder ya sabiendo que $N$ tiene dos cifras es utilizando que si un número es multiplo de 3 o de 9 entonces también la suma de sus cifras lo es: Como $N$ es múltiplo de 3 entonces $a+b+c+d$ es múltiplo de 3, pero entonces, ya que $N = 3(a+b+c+d)$, tenemos que $N$ es múltiplo de 9; otra vez, $a+b+c+d$ también debe serlo, así que $N$ es múltiplo de 27. Las posibilidades entonces para $N$ son 27, 54 y 81 y de éstos, sólo 27 cumple.

8. $60^{\circ}$. Para demostrar esto, sea $M$ el punto de intersección de $PR$ con $AC$. Por simetría, $M$ es punto medio de $PR$ y $CM$ es perpendicular a $PR$. Como $MR = MP$ y $CR = CQ$, entonces $PQ \,||\, MC$, por tanto el ángulo buscado $\angle PQR$ es igual a $\angle MCR$. Por otro lado, los triángulos rectángulos $RMC$ y $RMA$ tienen iguales los catetos, así que ellos mismos son iguales. Entonces $RA = RC$, de donde el triángulo $ARC$ es equilátero y así $\angle MCR = 60^{\circ}$