Soluciones del Examen Semifinal 2005

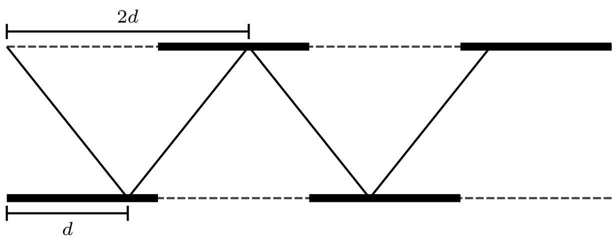
Solución 1.

$$\begin{aligned} b &= a \\ c &= a + b = 2a \\ d &= a + b + c = c + c = 4a \\ e &= 2d = 8a \\ f &= 2e = 16a = 7392 \end{aligned}$$

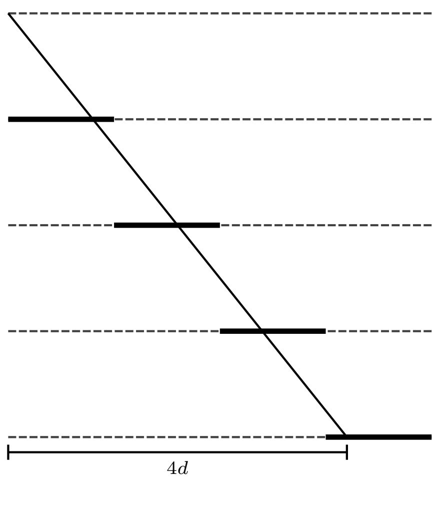
Entonces $a = \frac{7392}{16} = 462$.

Solución 2. Los siguientes movimientos son forzados para que el jugador en turno no pierda en la siguiente jugada: A debe mover una ficha hacia la esquina superior izquierda; luego B debe moverla (y es igual el lugar al que la mueva); luego A debe meter otra ficha al tablero y, sin importar cuál meta, B podrá meter la tercera ficha de manera que las tres casillas blancas estén ocupadas; así finalmente A deberá mover una ficha hacia la casilla sombreada y B ganará.

Solución 3. *Primera forma:* Al tocar la pelota en la segunda pared se forma un triángulo isósceles con base $2d$ y lo mismo ocurre con las siguientes paredes. Entonces toca la primera pared si y sólo si $0 \leq d \leq 1$; toca la segunda si y sólo si $1 \leq 2d \leq 2$; toca la tercera si y sólo si $2 \leq 3d \leq 3$, y toca la cuarta pared si y sólo si $3 \leq 4d \leq 4$. Combinando tenemos $\frac{3}{4} \leq d \leq 1$.



Segunda forma: Imaginemos que cada pared es como unespejo. Entonces el rebote se verá como una línea recta y con el toque de la pelota en la última pared se formará un triángulo rectángulo con base $4d$ (por semejanza). Entonces la condición será $3 \leq 4d \leq 4$, lo que es equivalente a $\frac{3}{4} \leq d \leq 1$.



Solución 4. Sea $x^2 = n + 3600$. Tenemos que $0 < x^2 - 3600 < 2005$, así que $\sqrt{3600} < x < \sqrt{5605}$, de donde $60 < x \leq 74$. Por otro lado, tanto 3600 como n son múltiplos de 9 (la suma de las cifras de n es 18), así que x es múltiplo de 3. Las posibilidades para x son 63, 66, 69 y 72. Los valores respectivos para n son: 369, 756, 1161 y 1584. El único valor que no tiene suma de díŋgitos igual a 18 es 1161 así que los tres posibles valores para n son 369, 756 y 1584.

Solución 5. El área $\mathcal{A}$ de ABC es la suma de las áreas de los triángulos AHB, BHC y CHA, así que $\mathcal{A} = 3 \times \frac{2k}{2} = 3k$. Por tener lados paralelos a ABC, el triángulo XYZ también es equilátero. Llamemos x a su lado y, al igual que hicimos con ABC, calculemos su área $\mathcal{X}$ como suma de las áreas de los triángulos con base x y vértice opuesto H, esto es, $\mathcal{X} = 3 \times x\frac{2k+3k+4k}{2} = \frac{9kx}{2}$. Por otro lado, $\mathcal{X} = \mathcal{A}+$ suma de las áreas de los trapecios $YBCZ$, $ZCAX$ y $XABY$, o sea

$$\frac{9kx}{2} = 3k + \frac{x+2}{2}k + \frac{x+2}{2}2k + \frac{x+2}{2}3k = 3k + \frac{x+2}{2}6k.$$

Multiplicando por 2 y dividiendo entre k tenemos $9x = 6 + 6x + 12$, de donde $x = 6$.

Solución 6. Cada camino debe pasar por exactamente una línea horizontal en cada nivel (considerando niveles los hexágonos verticales, es decir, el primer nivel consta del hexágono que tiene el punto A, el segundo nivel consta de los dos hexágonos pegados a él, el tercero es el hexágono junto a esos dos, etc.). La elección de una línea horizontal en cada nivel no está condicionada por las elecciones anteriores y la elección en cada nivel determina el camino, así que el número total de caminos es igual al número de posibles elecciones de las líneas horizontales: $2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 = 2^5 \times 3^4 = 2592$.