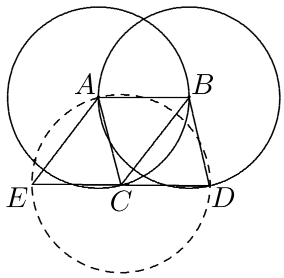
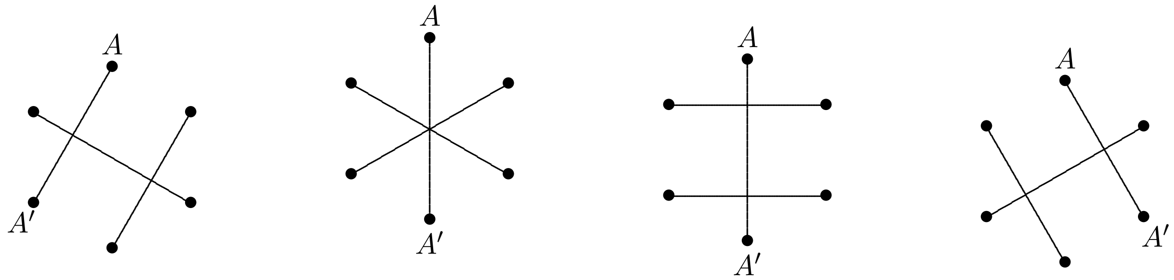
Soluciones del Examen Semifinal Estatal de la
Olimpiada Mexicana de Matemáticas 2011

1. Llamemos r al radio de $\mathcal{K}_A$ y $\mathcal{K}_B$. Los triángulos ABC y DBC son iguales por tener dos lados iguales (pues $|AB| = |BD| = r$ y BC es común) e igual el ángulo comprendido entre ellos. Entonces $|CD| = |AC| = r$ (de hecho, $\mathcal{K}_C$ pasa por D). Además los triángulos ABC y DBC son isósceles, así que $\angle ACB = \angle ABC = \angle CBD = \angle BCD = g$. Ahora podemos concluir de varias maneras que $AEG = g$:
Primera forma: Como EAC es isósceles, $\angle EAC = \angle AEC$ y, si llamamos h a este valor común, en vista de que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180^o tenemos que $2h + \angle ACE = 180^o$; pero también $2g + \angle ACE = 180^o$, de donde obtenemos $h = g$, como queríamos.
Segunda forma: Como $\angle ABC = \angle BCD$ tenemos que las rectas AB y CD (que es la misma que ED) son paralelas, pero entonces $AECB$ tiene dos lados parelelos y del mismo tamaño, por lo que es un paralelogramo, de donde $\angle AED = \angle ABC = g$.
Tercera forma: Por ángulos inscritos en un círculo, en $\mathcal{K}_C$ tenemos que $\angle AED = \frac{\angle(ACD)}{2} = \frac{2g}{2} = g$,



2. Digamos que las parejas son: (A, A'), (B, B') y (C, C') y que Adela es A. Tenemos las siguientes posibilidades de acomodo de las parejas con referencia a A:



Cada línea representa dónde queda una pareja. En cada esquema, la pareja $\{B, B'\}$ tiene a escoger cualquiera de las dos líneas y, entre sí B y B' se pueden quedar en cualquiera de los dos lugares; la línea restante queda determinada para la pareja $\{C, C'\}$ y esa pareja tiene dos posibilidades de acomodo en su línea. Entonces hay $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ posibilidades en cada esquema, así que en total hay 32 posibilidades.

3. Sean k el área de $AFHG$, $a = AG$, $b = AF$ y $c = GD$. Entonces el área de $FBIH = 3k$, el área de $GICD$ es $5k$ y el área total es $756 = k + 3k + 5k = 9k$, por lo que $ab = k = 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ $(*)$, $FB = 3b$ y $4b \cdot c = 5k = 5 \cdot 84 = 4 \cdot 5 \cdot 21$, de donde $bc = 3 \cdot 5 \cdot 7$ $(**)$. De $(*)$ y $(**)$ vemos que a debe ser múltiplo de 4. Entonces las posibilidades son:

a	b	c	$AD = a + c$
4	21	5	9
12	7	15	27
28	3	35	63
84	1	105	189

4. La suma de dos números escogidos no puede ser múltiplo de $2^2 = 4$, así que no puede haber un número con residuo 1 al dividirlo entre 4 y otro cuyo residuo de la división entre 4 sea 3. Esto dice que la elección de cualquiera de los números 1,5,9,13, 17 excluye la elección de cualquiera de los números 3,7,11,15,19. Por la misma razón, a lo más se puede escoger un número con residuo 0 (o sea, uno de la lista 4,8,12,16,20) y uno con residuo 2 (uno de la lista 2,6,10,14,18). Esto nos dice que el conjunto buscado a lo más tiene 5+1+1=7 elementos; sin embargo, las sumas tampoco pueden ser múltiplo de 9, así que los números 1 y 17 se excluyen mutuamente y lo mismo pasa con los números 5 y 13, los números 3 y 15 y los números 7 y 11. Entonces el conjunto buscado a lo más tiene 5 elementos. Vemos que 5 sí es posible escogiendo el conjunto: $\{1, 2, 5, 9, 12\}$.
(En general, los siguientes conjuntos que se excluyen mutuamente:

$$\{1,5,9,13,17\} \leftrightarrow \{3,7,11,15,19\}, \quad \{4\} \leftrightarrow \{8\} \leftrightarrow \{12\} \leftrightarrow \{16\} \leftrightarrow \{20\},$$
$$\{1,10,19\} \leftrightarrow \{8,17\}, \quad \{2,11,20\} \leftrightarrow \{7,16\}, \quad \{3,12\} \leftrightarrow \{6,15\}, \quad \{4,13\} \leftrightarrow \{5,14\}, \quad \{9\} \leftrightarrow \{18\},$$
$$\{5\} \leftrightarrow \{20\}, \quad \{6\} \leftrightarrow \{19\}, \quad \{7\} \leftrightarrow \{18\}, \quad \{8\} \leftrightarrow \{17\},$$
$$\{9\} \leftrightarrow \{16\}, \quad \{10\} \leftrightarrow \{15\}, \quad \{11\} \leftrightarrow \{14\}, \quad \{12\} \leftrightarrow \{13\}.)$$

5. Llamemos a los números $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$.
Primera forma. Como a_7, a_9 y a_{10} son mayores que a_8, entonces las posibilidades para a_8 son $1, 2, \ldots, 7$.
$*$ Si $a_8 = 7$, entonces hay 3 posibilidades para escoger a_9 y a_{10} (pues deben ser dos números en $\{8, 9, 10\}$ y las opciones son $\{8, 9\}$, $\{8, 10\}$ y $\{9, 10\}$). Al escoger esos dos números ya todo queda determinado (pues los que sobren se pondrán en orden para formar la sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_7$; por ejemplo, si se escogen el 8 y el 10, la sucesión será $1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 7, 8, 10$).
$*$ Si $a_8 = 6$, entonces hay 6 posibilidades para escoger a_9 y a_{10}, pues deben ser dos números en $\{7, 8, 9, 10\}$, los cuales son: 3 escogiendo $a_9 = 7$; 2, escogiendo $a_9 = 8$; 1 escogiendo $a_9 = 9$ (esto también puede contarse usando lenguaje de combinaciones y es $\binom{4}{2}$).
$*$ Si $a_8 = 5$, entonces hay 10 posibilidades para escoger a_9 y a_{10} pues deben ser dos números en $\{6, 7, 8, 9, 10\}$, los cuales son: 4 escogiendo $a_9 = 6$; 3, escogiendo $a_9 = 7$, etc. (o, en lenguaje de cominaciones, $\binom{5}{2}$).
Así sucesivamente tenemos que el total de posibilidades es:

$$3+(1+2+3)+(1+2+3+4)+(1+2+\cdots+5)+(1+2+\cdots+6)+(1+2+\cdots+7)+(1+2+\cdots+8)$$
$$= 2 + 6 + 10 + 15 + 27 + 28 + 36 = 119.$$

(lo cual, en lenguaje de combinaciones es

$$2 + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} + \cdots + \binom{9}{2}.)$$

Segunda forma (para lectores que manejan el lenguaje de las combinaciones). La sucesión queda determinada si se escogen los primeros 7 números (o los últimos 3) y la única elección que no hace a_8 menor que a_7 es $a_i = i$ para toda i. Entonces el número de posibilidades es $\binom{10}{7} - 1 = \binom{10}{3} - 1 = 119$.